

ГЕОРГІЙ ФІЛАТОВ

ОПІР МАТЕРІАЛІВ
В ЗАДАЧАХ І ПРИКЛАДАХ

КНИГА 2

**Статично невизначувані системи.
Стійкість. Динаміка.**

Навчальний посібник

Київ
Видавництво Ліра-К
2019

УДК 620.17.08(075.8+076)
Ф51

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки
як навчальний посібник
(лист №1/11-5582 від 18.03.13)*

Рецензенти:

Красовський В.Л., професор, д.т.н., завідувач кафедри будівельної механіки та опору матеріалів Придніпровської державної академії будівництва і архітектури.

Нестеренко О.І., професор, доктор фіз.-мат. наук, завідувач кафедри фізики Українського державного хіміко-технологічного університету.

Філатов Г.

Ф51 Опір матеріалів в задачах і прикладах : Статично невизначувані системи. Стійкість. Динаміка. Кн. 2 : Навч. посіб. – Київ : Видавництво Ліра-К, 2019. – 342 с.

ISBN 978-617-7748-35-8

У книзі наведена методика розв'язку задач з опору матеріалів викладені в багаторівневому режимі з покроковим засвоєнням матеріалу з таких тем: розрахунок статично невизначуваних рам та нерозрізних балок методом сил, розрахунок стержневих систем на косе згинання і при позацентровому прикладенні навантаження, валів на згинання з крученням, розрахунок стиснутих стержнів на стійкість та тонкостінних оболонок на міцність, розрахунок стержневих систем при динамічній дії навантаження з урахуванням сил інерції, ударних навантажень і коливань, розрахунок елементів конструкцій при дії повторно-змінних напружень. В книзі наводяться варіанти завдань для самостійної роботи та допомога у вигляді підказок. Книга призначена для студентів очної та заочної форм навчання, які вивчають опір матеріалів, і осіб, які бажають самостійно вивчити цю дисципліну.

УДК 620.17.08(075.8+076)

ISBN 978-617-7748-35-8

© Філатов Г., 2019
© Видавництво Ліра-К, 2019

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
-----------------	---

РОЗДІЛ 1. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

1.1. Класифікація стержневих систем. Уявлення про кількість ступенів вільності	8
1.2. Класифікація стержневих систем за кінематичною ознакою	10
1.2.1. Геометрично змінювані системи	10
1.2.2. Геометрично незмінювані системи	11
1.2.3. Миттєво змінювані системи	11
1.3. Класифікація стержневих систем за статичною ознакою	13
1.3.1. Статично визначувані системи	13
1.3.2. Статично невизначувані системи	14
1.4. Основний зміст методу сил	17
1.5. Порядок розв'язання статично невизначуваних задач методом сил	20
1.6. Задача №1. Розрахунок методом сил статично невизначуваних рам	27
1.6.1. Варіанти завдань	27
1.6.2. Допомога	31
1.6.3. Відповіді на запитання до задачі №1	48
1.7. Особливості розрахунку статично невизначуваних (нерозрізних) балок методом сил	49
1.8. Задача №2. Розрахунок методом сил нерозрізних балок	51
1.8.1. Варіанти завдань	51
1.8.2. Допомога завдань	52
1.8.3. Відповіді на запитання до задачі №2	85
1.9. Матрична форма методу сил	86
1.10. Задача №3. Розрахунок статично невизначуваних стержневих систем методом сил в матричній формі	89
1.10.1. Варіанти завдань	89
1.10.2. Допомога	92
1.10.3. Відповіді на запитання до задачі №3	105

РОЗДІЛ 2. СКЛАДНИЙ ОПІР

2.1. Основні уявлення і визначення. Класифікація видів складного опору	108
2.2. Методика розрахунку на міцність при складному опорі першої групи	109
2.3. Просторове (складне) згинання	112
2.4. Задача №1. Косе згинання	114
2.4.1. Варіанти завдань	120
2.4.1. Допомога	122
2.4.3. Відповіді на запитання до задачі №1	129
2.5. Задача №2. Позацентрове розтягання (стискання) прямого бруса	130
2.5.1. Варіанти завдань	133
2.5.2. Допомога	136

2.5.3. Відповіді на запитання до задачі №2	151
2.6. Задача №3. Згинання з крученням. Розрахунок валів на згинання з крученням.....	152
2.6.1. Варіанти завдань.....	155
2.6.2. Допомога	157
2.6.3. Відповіді на запитання до задачі №3	166

РОЗДІЛ 3. РОЗРАХУНОК СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ

3.1. Уявлення про форми пружної рівноваги	168
3.2. Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стержня. Вплив способів закріплення кінців стержня на величину критичної сили	170
3.3. Межі застосовності формули Ейлера. Формула Ясинського	172
3.4. Практичні методи розрахунку стиснутих стержнів на стійкість. Уявлення про коефіцієнт поздовжнього згинання	175
3.5. Задача №1. Визначення величини критичної і допустимої стискальної сили	178
3.5.1. Варіанти завдань.....	178
3.5.2. Допомога	182
3.5.3. Відповіді на запитання до задачі №1	188
3.6. Задача №2. Визначення розмірів поперечних перерізів стиснутих стержнів.....	188
3.6.1. Варіанти завдань.....	188
3.6.2. Допомога	191
3.6.3. Відповіді на запитання до задачі №2	209

РОЗДІЛ 4. РОЗРАХУНОК ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК

4.1. Головні визначення. Уявлення про безмоментну теорію розрахунку оболонок.....	211
4.2. Визначення напружень в осесиметрично навантажених оболонках за безмоментною теорією. Виведення рівняння Лапласа.....	212
4.2.1. Розрахунок сферичної оболонки	215
4.2.2. Розрахунок циліндричної оболонки зі сферичним днищем	216
4.2.3. Розрахунок циліндричної оболонки з конічним днищем	217
4.3. Теореми про проекцію рівнодіючих сил тиску.....	220
4.4. Задача №1. Розрахунок на міцність тонкостінних оболонок за безмоментною теорією	222
4.4.1. Варіанти завдань.....	222
4.4.2. Допомога	225
4.4.3. Відповіді на запитання до задачі №1	231

РОЗДІЛ 5. ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ. УРАХУВАННЯ СИЛ ІНЕРЦІЇ, УДАРНОЇ ДІЇ НАВАНТАЖЕННЯ ТА КОЛИВАНЬ

5.1. Умови виникнення динамічних навантажень. Три задачі динаміки	232
5.2. Урахування сил інерції	232
5.2.1. Урахування сил інерції при поступальному русі	232

5.2.2. Урахування сил інерції при рівномірному обертанні.....	234
5.2.3. Урахування сил інерції при розрахунку на міцність стержня, що обертається навколо нерухомої осі	236
5.3. Задача №1. Розрахунок елементів конструкцій з урахуванням сил інерції	237
5.3.1. Варіанти завдань.....	237
5.3.2. Допомога	242
5.3.3. Відповіді на запитання до задачі №1.....	253
5.4. Розрахунок на міцність при ударних навантаженнях. Технічна теорія удару	253
5.5. Узагальнення динамічного коефіцієнта при ударі	254
5.6. Коефіцієнт динамічності при ударі	255
5.7. Урахування власної ваги при ударі	256
5.8. Удар, що скручує.....	258
5.9. Задача №2. Розрахунок елементів конструкцій і деталей машин з урахуванням дії удару	259
5.9.1. Варіанти завдань.....	259
5.9.2. Допомога	263
5.9.3. Відповіді на запитання до задачі №2.....	274
5.10. Головні визначення теорії коливань. Класифікація механічних коливань	275
5.11. Власні коливання системи з одним ступенем вільності	275
5.12. Вимушені коливання пружної системи	277
5.13. Задача №3. Розрахунок елементів конструкцій при коливаннях.....	279
5.13.1. Варіанти завдань.....	279
5.13.2. Допомога	282
5.13.3. Відповіді на запитання до задачі №3.....	291

РОЗДІЛ 6. ОПІР МАТЕРІАЛІВ ДІЇ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕНЬ

6.1. Уявлення про втомну міцність	292
6.2. Головні характеристики циклу	293
6.3. Фактори впливу на величину границі витривалості.....	298
6.4. Діаграми граничних напружень і граничних амплітуд.....	306
6.5. Уявлення про діаграми руйнівних напружень і амплітуд	309
6.6. Визначення коефіцієнта запасу міцності. Умова міцності при змінному напруженні	311
6.7. Задача №1. Розрахунок на міцність при повторно-змінних напруженнях	318
6.7.1. Варіанти завдань.....	318
6.7.2. Допомога	322
6.7.3. Відповіді на запитання до задачі №1.....	329

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	330
--------------------------------	-----

ДОДАТКИ	331
----------------------	-----

ПЕРЕДМОВА

Опір матеріалів є загально інженерною дисципліною, яка викладає методи розрахунку елементів конструкцій і деталей машин на міцність, жорсткість і стійкість. Основні положення опору матеріалів спираються на закони і теореми загальної механіки і в першу чергу на закони статички, без знання яких вивчення курсу опору матеріалів неможливе.

На відміну від теоретичної механіки, в опорі матеріалів розглядаються задачі, у яких найбільш істотними є властивості тіл, що *деформуються*, а закони руху тіла як жорсткого цілого не тільки відступають на другий план, але у ряді випадків є просто несуттєвими. Водночас внаслідок спільності основних положень опір матеріалів може розглядатися як розділ механіки, який називається механікою твердих тіл, що деформуються.

При проектуванні різних інженерних споруд доводиться визначати розміри окремих елементів конструкцій. Це завдання вирішується на основі розрахунків, метою яких є створення міцної, стійкої, довговічної і разом з тим економічної споруди. Таке ж завдання виникає при проектуванні машин, літаків, суден і т.п. Всі ці питання розглядаються в комплексі дисциплін, серед яких фундаментальним є опір матеріалів.

Базуючись в головному на теоретичній механіці і математиці, які озброюють опір матеріалів методами теоретичного аналізу явищ, що відбуваються в матеріалі під дією навантажень, опір матеріалів є основою для таких дисциплін, як “Деталі машин”, “Статика споруд”, “Інженерні конструкції” та ін. Звідси випливає найважливіша роль курсу опору матеріалів для вищої технічної освіти.

Опір матеріалів не вичерпує всіх питань механіки твердого тіла, що деформується. Цими питаннями займаються такі суміжні дисципліни, як будівельна механіка стержневих систем, теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості. На основі загальних положень опору матеріалів створені нові розділи науки про міцність, що мають конкретну практичну спрямованість. Сюди відносяться будівельна механіка споруд, будівельна механіка літака, теорія міцності зварних конструкцій і багато інших.

Опір матеріалів має на меті створити практично прийнятні прості прийоми розрахунку *типових* елементів конструкцій, що найбільш часто зустрічаються. При цьому широко використовуються різні наближені методи. Необхідність довести розв’язок кожної практичної задачі до деякого чисельного результату примушує в опорі матеріалів вдаватися у ряді випадків до гіпотез — припущень, які виправдовуються надалі шляхом зіставлення розрахункових даних з експериментальними. У поєднанні з аналітичними методами розрахунку в опорі матеріалів вивчаються експериментальні дані, отримані в лабораторних і натурних умовах.

Методи опору матеріалів не залишаються сталими. Вони змінюються разом з виникненням нових завдань і нових вимог практики. При проведенні інженерних розрахунків методи опору матеріалів слід застосовувати творчо і пам’ятати, що успіх практичного розрахунку полягає не стільки у застосуванні

складного математичного апарату, скільки в умінні вникати в сутність досліджуваного об'єкту, знаходити найбільш вдалі спрощуючі припущення і доводити розрахунок до остаточного чисельного результату.

Даний посібник призначений для студентів денної і заочної форм навчання напрямку підготовки “Машинобудування”, освітньо-кваліфікаційний рівень — бакалавр, але може бути використаний при підготовці фахівців інших спеціальностей, зокрема, будівельних

Посібник є своєрідним тренажером для розв'язку задач з різних розділів опору матеріалів. В основу розв'язку задач, як методичний засіб, закладений багаторівневий гральний принцип, який широко використовується в комп'ютерних іграх. Студент отримує кілька варіантів для самостійної роботи у вигляді типових задач за темою, що вивчається. Кожна задача розбивається на рівні і студент послідовно відповідає на запитання, які містить кожний з рівнів. Якщо він не знає, як відповісти на рівневі запитання, він може скористатися підказками, де у багаторівневому режимі розв'язуються подібні задачі.

В першій книзі посібника був розглянутий розв'язок типових задач з опору матеріалів на такі теми, як “Осьове розтягання та стискання”, “Основи теорії напруженого і деформованого стану”, “Геометричні характеристики плоских фігур”, “Зсув і кручення”, “Внутрішні силові фактори згинання”, “Розрахунок балок на міцність” та “Розрахунок балок і рам на жорсткість”.

У цій книзі розглядається розрахунок у багаторівневому режимі статично невизначуваних стержневих систем методом сил (рам і нерозрізних балок), розрахунок стержневих систем при складному опорі, стиснутих стержнів на стійкість, розрахунок на міцність тонкостінних оболонок, розрахунок стержневих систем при динамічній дії навантаження та розрахунок елементів конструкцій і деталей машин на витривалість.

Довідкові дані щодо основних фізико-механічних характеристик конструкційних матеріалів, сортаменту прокатної сталі наводяться у “Додатках”. Деякі довідкові матеріали, коефіцієнти, необхідні формули для розв'язку задач та ін. наводяться в теоретичних підрозділах посібника, які передують завданням для самостійної роботи.

При підготовці цієї книги були використані деякі методичні розробки, наведені в курсі лекцій колишнього завідувача кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів УДХТУ професора В.Й.Тарновського, які мають відношення до розрахунку статично невизначуваних стержневих систем методом сил у звичайній і матричній формі, методики розрахунку елементів конструкцій при складному опорі та при урахуванні динамічної дії навантаження.

Автор виражає вдячність завідувачу кафедри будівельної механіки та опору матеріалів Придніпровської державної академії будівництва і архітектури, д.т.н., професору Красовському В.Л. та завідувачу кафедри фізики Українського державного хіміко-технологічного університету, доктору фізико-математичних наук, професору Нестеренко О.І. за рецензування цієї книги і зроблені ними зауваження

РОЗДІЛ 1

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

1.1. Класифікація стержневих систем. Уявлення про кількість ступенів вільності

Усі стержневі системи можна розділити на три типи: ферми, балки і рами. До *ферм* відносяться системи, що складаються зі стержнів, з'єднаних у вузлах шарнірами (Рис. 1.1).

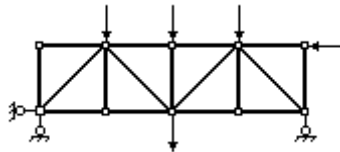


Рис. 1.1

Відмінною рисою ферми є те, що навантаження на ферму можна прикладати у вигляді зосереджених сил тільки *до вузлів*. Це пояснюється тим, що стержні, з яких складається ферма, зазнають деформації розтягання або стискання. Якщо навантаження на ферму у вигляді зосередженої сили або розподіленого навантаження прикласти безпосередньо до стержня, що з'єднує вузли, а не у вузлі, то таке навантаження викликати згинання стержня, на який він не розрахований. Позавузлове прикладення навантаження до ферми може призвести до її руйнування.

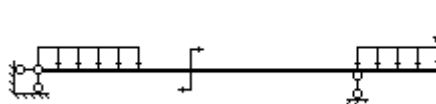


Рис. 1.2

Балками називаються стержневі конструкції, які зазнають дії навантажень, прикладених у вигляді зосереджених сил і моментів або розподіленого навантаження у будь-якому перерізі балки в прольоті або на консолі (Рис.12). *Прольотом* називається частина балки, розташована між її опорами. *Консоль* — це частина балки, що виступає за опору. Основний вид деформації, якої зазнає балка, є плоске поперечне згинання.

Рамою називається стержнева система, що складається зі стержнів, жорстко з'єднаних у вузлах (Рис. 1.3). Жорстке з'єднання стержнів рами у вузлі не допускає взаємного повороту перерізів, що примикають до вузла. Конструкція рами дозволяє прикладати навантаження в будь-якому перерізі рами, як у вузлах, так і поза вузлами. Стержні рами можуть зазнавати ті ж самі деформації, що і балка. Рамні системи мають широке розповсюдження в промисловому і цивільному будівництві, у машинобудуванні, на транспорті, в авіа- і суднобудуванні та ін.

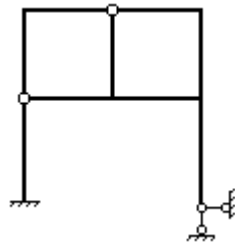


Рис. 1.3

Під *числом ступенів вільності* слід розуміти кількість незалежних координат, що визначають положення точки або тіла у просторі або на площині. Вільна точка на площині має два ступеня вільності — координати x та y (Рис. 1.4).

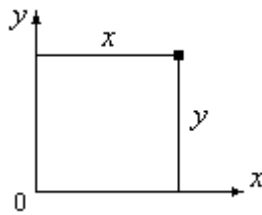


Рис. 1.4

Вільна точка у просторі має три ступеня вільності — координати x , y та z (Рис.1.5).

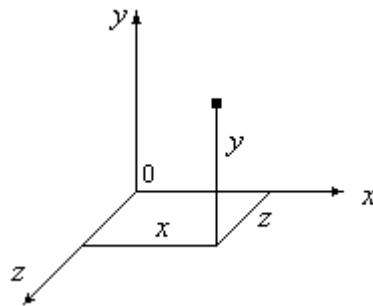


Рис. 1.5

Вільне тіло на площині має три ступеня вільності — дві координати довільної точки, що належить прямій лінії АВ, проведеної у тілі, і кут повороту α прямої лінії АВ відносно однієї з осей координат (Рис. 1.6).

Вільне тіло в просторі має шість ступенів вільності — три координати довільної точки, що належить прямій лінії, проведеної у тілі, і три кути повороту цієї лінії відносно осей координат.

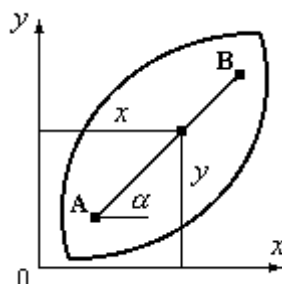


Рис. 1.6

Пристрій, що знищує ступінь вільності, називається *зв'язком або в'язью*. В залежності від кількості ступенів вільності, які має конструкція, розрізняють кілька класифікацій стержневих систем.

1.2. Класифікація стержневих систем за кінематичною ознакою

Відповідно до цієї класифікації існують три типи стержневих систем: геометрично змінювані, геометрично незмінювані і миттєво змінювані системи [8].

1.2.1. Геометрично змінювані системи

Геометрично змінюваними називаються такі стержневі системи, переміщення вузлів яких можливе при відсутності деформації стержнів системи. В техніці такі системи називають *механізмами*. Одним з прикладів геометрично змінюваної системи є пантограф, який використовується на транспорті для передачі струму від контактного дроту до двигуна транспортного засобу (Рис. 1.7).

Шарніри у вузлах А, В, С і D пантографа дозволяють змінювати його конфігурацію в залежності від необхідності. При цьому прямі кути, утворені елементами пантографа, змінюються, а деформації стержнів пантографа не виникають.

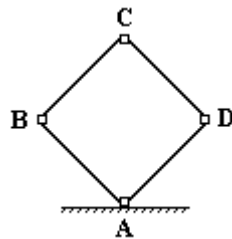


Рис.1.7

Іншим прикладом геометрично змінюваної системи є кривошипно-шатунний механізм (Рис. 1.8).

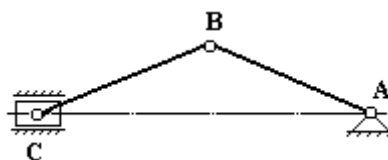


Рис. 1.8

Кривошип АВ, обертаючись навколо вузла А, надає руху шатуну ВС і разом з ним повзуну С. Якщо у вузлі В механізму прикласти вертикальну силу, то повзун переміститься і кут АВС змінить свою величину без виникнення деформацій у шатуні і кривошипі. Якщо штучним чином обмежити переміщення повзуна С, то зображена на рис.1.8 система перестане бути

геометрично змінюваною. Слід зазначити, що геометрично змінювані системи не можна використовувати як несучі конструкції.

1.2.2. Геометрично незмінювані системи

Геометрично незмінюваними називаються стержневі системи, переміщення вузлів у яких відбувається тільки за рахунок деформації стержнів системи або за рахунок зсуву опор конструкції. Якщо всі елементи такої системи вважати абсолютно твердими тілами, то ніякі зовнішні сили не в змозі визвати переміщення в системі. В геометрично незмінювану систему можна перетворити пантограф, зображений на рис.1.7, якщо з'єднати вузли пантографа А і С жорстким стержнем (Рис. 1.9).

Тепер, щоб змінити прямі кути $\angle CBA$ або $\angle CDA$ системи, потрібно перебороти опір стержнів системи і викликати їх деформацію.

У геометрично незмінювану систему можна перетворити і кривошипно-шатунний механізм. Для цього, як це відзначалося вище, необхідно обмежити переміщення повзуна С в горизонтальному напрямку. У цьому випадку при прикладенні у вузлі вертикальної сили зміна кута $\angle ABC$ відбудеться тільки за рахунок деформації елементів АВ, ВС і АС.

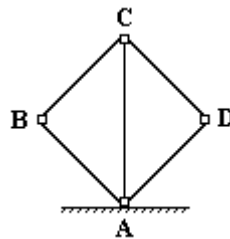


Рис. 1.9

Геометрично незмінюваними є ферма, балка і рама, зображені відповідно на рис.1.1, 1.2, і 1.3. Слід зазначити, що в техніці завжди використовуються в якості несучих конструкцій тільки геометрично незмінювані системи.

1.2.3. Миттєво змінювані системи

З кінематичної точки зору *миттєво змінюваними* називаються такі стержневі системи, які допускають нескінченно малі переміщення вузлів системи без деформації її елементів. З цього погляду ці стержневі системи схожі на геометрично змінювані. Але на відміну від геометрично змінюваних систем в миттєво змінюваних системах при нескінченно малих переміщеннях вузлів виникають нескінченно великі зусилля і напруження в стержнях, що призводить до миттєвого руйнування конструкції. Покажемо це на прикладі стержневої системи, що складається з двох горизонтально розташованих стержнів, з'єднаних у вузлі В шарніром (Рис. 1.10).