

ЗМІСТ

Передмова	4
Тема 1. Поняття числа.....	6
Тема 2. Елементи комбінаторики.....	22
Тема 3. Вступ до теорії графів.....	31
Тема 4. Лінійна алгебра	47
Тема 5. Векторна алгебра.....	65
Тема 6. Аналітична геометрія	91
Тема 7. Функція дійсної змінної, властивості і графічне зображення.....	118
Тема 8. Границя функції	129
Тема 9. Неперервність функції. Властивості неперервних функцій.....	140
Тема 10. Похідна та диференціал функції, їх застосування	147
Тема 11. Первісна. Невизначений інтеграл.....	162
Тема 12. Визначений інтеграл та його застосування	170
Тема 13. Диференціальне числення функцій багатьох змінних	186
Тема 14. Звичайні диференціальні рівняння.....	198
Тема 15. Ряди.....	223
Тема 16. Подвійні інтеграли.....	237
Практикум з лінійної алгебри	244
Практикум з векторної алгебри.....	257
Практикум з аналітичної геометрії.....	260
Практикум № 1 з математичного аналізу.....	270
Практикум № 2 з математичного аналізу.....	284
Практикум з диференціальних рівнянь	301
Практикум з теорії рядів	317
Тестові завдання	339
Додатки.....	369
Відповіді, вказівки.....	392
Список використаної і рекомендованої літератури	436

ПЕРЕДМОВА

Сучасний рівень і темпи розвитку будівництва висувають перед молодими спеціалістами важливу вимогу – не тільки мати науковий потенціал в обраній діяльності, але й ефективно застосовувати здобуті знання для розв'язку проблем, що виникають в їх практичній діяльності.

Наразі під час відновлення нашої країни після жорстокого нападу росії і знищення наших міст, такі знання і навички стануть в нагоді.

Останнім часом практики використовують методи математичного програмування і сіткового планування, що базуються на лінійній алгебрі, математичному аналізі функцій однієї і багатьох змінних, дискретній математиці та інших розділах вищої математики.

Навчальний посібник містить 16 розділів, що включають в себе основні питання навчальної програми з вищої математики для архітектурних, природничих, інженерних та інших спеціальностей закладів вищої освіти. Всі розділи супроводжуються основними відомостями з теорії, визначеннями, формулами і докладно розв'язаними типовими задачами з указаними методами їх розв'язку. В кінці кожного розділу пропонується низка задач для самостійного розв'язування з наведеними відповідями. Це дає студентам широкі можливості для активної самостійної роботи і заощадження часу.

Для активізації пізнавальної діяльності студентів і індивідуалізації навчання в посібнику спеціально наведені практикуми з основних розділів курсу і контрольні тестові завдання.

В основу книги покладено матеріал навчального посібника Турчанінової Л.І., Долі О.В. „Вища математика в прикладах і задачах” 2020 р. Цей матеріал вдало пройшов апробацію.

Слід зазначити, що посібник з'явився в результаті багаторічного досвіду роботи його авторів на різних кафедрах Київського національного університету будівництва і архітектури.

Автори сподіваються на широке використання видання студентами всіх спеціальностей, як денної так і заочної форм навчання, зокрема студентами дистанційної форми навчання для самостійного вивчення матеріалу. Книга стане в нагоді викладачам для проведення дистанційних і практичних занять з вищої і прикладної математики, а також слухачам мережі відділення до університетської підготовки.

В посібник увійшли матеріали різних математичних видань, які включені в список використаної літератури.

Інформація про внесок кожного автора: Турчанінова Л.І. – 11,0 др.арк., Доля О.В. – 11,0 др.арк., Рябчун Ю.В. – 3,0 др.арк., Мицюк С.В. – 0,45 др.арк.

Київ, березень-квітень 2025 р.

ТЕМА 1. ПОНЯТТЯ ЧИСЛА

Інтуїтивне визначення **множини** за Кантором: множина S є будь-яке зібрання визначених і різних між собою об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, яке розуміється як єдине ціле. Ці об'єкти називаються **елементами** або **членами** множини S .

Кантор ввів поняття **потужності** (або об'єму) **множини**: дві множини мають однакову потужність, якщо члени будь-якої з них можна зіставити членам іншої, утворивши пари відповідних членів.

Зліченною множиною називається будь-яка множина, елементи якої можна бієктивно (взаємно-однозначно) зіставити з усіма натуральними числами.

Кажуть, що зліченна множина має потужність N_0 ("алеф-нуль"), а будь-яка множина, що рівнопотужна з множиною усіх підмножин довільної зліченної множини, має потужність 2^{N_0} (або має потужність **континуума**).

Дві множини називаються **еквівалентними**, якщо між їх елементами можна встановити взаємно-однозначну відповідність.

Класична теорема Кантора формулюється таким чином: дійсний континуум є незліченим. Іншими словами, множини дійсних чисел не можна розташувати у послідовність, тоді як між двома дійсними числами завжди знайдеться третє.

Інтуїтивний принцип об'ємності: дві множини **рівні** в тому і тільки в тому випадку, коли вони містять одні і ті ж елементи.

Твердження, що множина A складається з різних елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$ (і тільки з них), умовно запишемо:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Зокрема, $\{x\}$ – так звана **одиначна множина** – є одноеlementна множина, єдиним елементом якої являється x . **Порожня множина** не містить жодного елемента і позначається символом $\emptyset$.

Під **формою від x** будемо розуміти скінченну послідовність зі слів і символу x таку, що якщо кожний символ x з цієї послідовності замінити одним і тим же іменем деякого предмета відповідного роду, то в результаті отримаємо вислів.

З точки зору граматики форму від x можна визначати і по іншому – як речення, в якому щось стверджується про x .

Опис множини за допомогою форми базується на **інтуїтивному принципі абстракції**: будь-яка форма $P(x)$ визначає деяку множину A за умови, що елементами множини A є тільки ті предмети a , що роблять $P(a)$ справжнім висловленням.

Форму $P(x)$, що використовується для побудови деякої множини, називають **властивістю, що визначає множину**: $\{x|P(x)\}$.

Якщо A і B дві множини, то кажуть, що A **включена** в B (символічний запис: $A \subseteq B$), якщо кожен елемент множини A являється одночасно елементом множини B . В цьому випадку кажуть також, що множина A є **підмножиною** множини B . Множина A **строго включена** в B (символічно: $A \subset B$), або B строго включає A , або A є **справжня підмножина** B , якщо $A \subset B$ і $A \neq B$.

Кожна множина $A \neq \emptyset$ має принаймні дві різні підмножини: саме A і $\emptyset$. Крім того, кожний елемент a множини A визначає деяку підмножину множини A :

$$\{a\} \subseteq A.$$

Підмножини A і $\emptyset$ називаються **невласними**, а всі інші підмножини множини A називаються **власними** (або справжніми). Множина, елементами якої являються всі підмножини множини A , називається множиною підмножин A або множиною ступенем A і позначається $P(A)$.

Прийнято позначати **множину натуральних чисел** через N :

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (1.1)$$

Система **цілих чисел** позначається через Z :

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.2)$$

Множина **раціональних чисел** позначається:

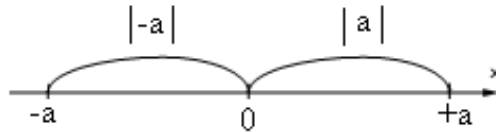
$$Q = \left\{x \mid x = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0\right\}. \quad (1.3)$$

Числа, які представляють собою довжини відрізків, що неспільномірні з одиницею масштабу (тобто їх довжину не можна виразити цілим або дробовим числом) в сучасній математиці називаються **ірраціональними**. **Раціональне число є нескінченним десятковим періодичним дробом, а**

ірраціональне число – нескінченним десятковим неперіодичним дробом.

Сукупність раціональних і ірраціональних чисел утворює **множину дійсних чисел**, яку прийнято позначати R .

Геометричним образом дійсного числа аявляється точка на дійсній віссі, причому ця точка розташована праворуч від нуля, якщо число а додатне і ліворуч, якщо число а від’ємне.



Відстань від дійсного числа a до нуля називається його **абсолютною величиною** або **модулем** і позначається $|a|$. За визначенням $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

Геометричним образом **комплексного числа** z являється точка **комплексної площини** z . На цій площині задані дві вісі: дійсна – $Re\ z$ і уявна – $Im\ z$. На дійсній вісі задані дійсні числа, а на уявній – уявні, тобто такі, що утворені за допомогою **уявної одиниці** $i = \sqrt{-1}$. Тоді комплексне число z в алгебраїчній формі матиме вигляд $z = x + iy$, $x = Re\ z$ і являється проєкцією точки z на дійсну вісь, а $y = Im\ z$ зявляється проєкцією точки z на уявну вісь. Відстань від початку координат до точки z називається **модулем комплексного числа** z і позначається $|z|$. Число $\bar{z} = x - iy$ називається **спряженим** до числа z . Пара чисел $z, \bar{z}$ називається **комплексно-спряженою парою**.

Нехай числа a і b дійсні і задовольняють нерівності: $a < b$. Наведемо приклади множин дійсних чисел:

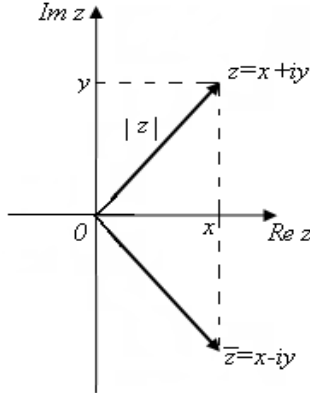
- **відрізок** або **сегмент** $[a,b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$;
- **інтервал** або **відкритий відрізок**
 $(a,b) =]a,b[= \{x \in R | a < x < b\}$;
- $[-\infty, a] = \{x \in R | -\infty < x \leq a\}$;
- **півінтервал** $(a,b] =]a,b] = \{x \in R | a < x \leq b\}$;
 $[a,b) = [a,b[= \{x \in R | a \leq x < b\}$;
- **нескінченні інтервали або півінтервали**
 $(-\infty, \infty) = R$,

$$(-\infty; a] = \{x \in R | -\infty < x \leq a\};$$

$$[a, \infty) = \{x \in R | a \leq x < \infty\};$$

– ε – окіл точки C

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) = \{x \in R | c - \varepsilon < x < c + \varepsilon\}.$$



Об'єднанням двох множин A і B називається множина всіх елементів, що належать або множині A , або множині B , або їм обом відразу:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Перетином двох множин A і B називається множина всіх елементів, що належать одночасно і множині A , і множині B :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Покриттям множини A називається така система V її власних підмножин, в якій кожний елемент множини A є водночас і елементом хоча б однієї підмножини з системи V . Якщо власні підмножини з системи V не перетинаються, то таке покриття множини A називається **розбиттям множини A** , а власні підмножини системи V – **класами** цього розбиття.

Абсолютним доповненням множини A називається множина елементів універсальної множини U , які не належать множині A :

$$\bar{A} = \{x | x \in U \text{ і } x \notin A\}.$$

Відносним доповненням або різницею двох множин A і B називається множина тих елементів множини A , які водночас не належать множині B :

$$A - B = \{x | x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Симетричною різницею або сумою множин A і B називається множина елементів множин A і B , що не належать водночас обом множинам:

$$A + B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B \text{ і } x \notin (A \cap B)\}.$$

Основні властивості операцій над множинами представлені в таблиці 1.1, в якій U – універсальна множина, а A, B, C – її підмножини.

Таблиця 1.1

1. Комутативні закони: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$
2. Асоціативні закони: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
3. Дистрибутивні закони: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
4. Закони доповнення: $A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset.$
5. Закони тотожності: $A \cup \emptyset = A, A \cap U = A.$ $A \cup U = U, A \cap \emptyset = \emptyset.$
6. Закони ідемпотентності: $A \cup A = A, A \cap A = A.$
7. Закони поглинання: $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$
8. Закони де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$
9. Властивості $\emptyset$ і U : $\overline{\emptyset} = U, \bar{U} = \emptyset.$
Властивості доповнення, різниці, симетричної різниці, включення і рівності:
10. Якщо $A \cup B = U$ і $A \cap B = \emptyset$, то $B = \bar{A}.$
11. $\bar{\bar{A}} = A.$
12. $\bar{A} = A - U.$
13. $A - B = A \cap \bar{B}.$
14. $A + B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$

15. $A + B = B + A$.
16. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
17. $A + \emptyset = \emptyset + A = A$.
18. $A \subset B$ тоді і тільки тоді, коли $A \cap B = A$ або $A \cup B = B$, або $A \cup \bar{B} = \emptyset$.
19. $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \emptyset$.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Довести, що $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4, 4, 1, 3, 1\}$.

Доведення.

Обидві множини містять лише чотири різних елементи, а саме 1, 2, 3, 4. Тому вони складаються з одних і тих же елементів. На практиці не слід записувати множину так, як записано праворуч. Елементи, що повторюються, не грають ролі в операціях над множинами і тому немає потреби їх записувати.

Приклад 2.

Довести, що $\{\{1,2\}\} \neq \{1,2\}$.

Доведення.

Множини не містять одні й ті ж елементи, так як ліворуч – одноелементна множина, що містить єдиний елемент $\{1,2\}$, а множина праворуч має два елементи, а саме 1 і 2.

Приклад 3.

Для множини $A = \{a,b,c\}$ побудувати $P(A)$.

Розв'язання.

Виходячи зі сказаного вище, маємо:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Приклад 4.

Зобразити на діаграмі Венна множини: $P = \{a,b,c,d\}$, $Q = \{a,c\}$, $R = \{d,f\}$.

Розв'язання.

Виходячи з визначення, діаграма Венна для заданих множин представлена на рис. 1.1.

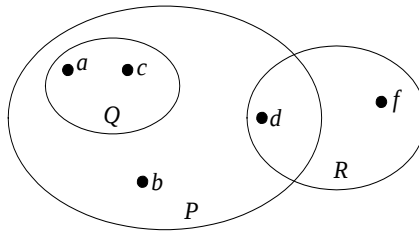


Рис. 1.1

З цієї діаграми ми бачимо, що $Q \subset P$. Цей факт ілюструється тим, що точки a і c використовуються тільки один раз і множина Q повністю лежить усередині множини P . Крім того, з рисунку бачимо, що $R \not\subset P$, так як точка f не належить множині P .

Приклад 5.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Визначити множину $A \cup B$.

Розв'язання.

За визначенням

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

На рис. 1.2 зображена діаграма Венна. Об'єднання множин заштриховане.

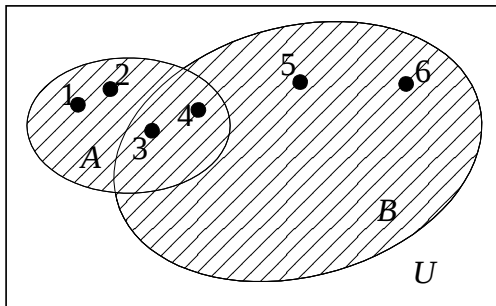


Рис. 1.2