ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С.П. ТИМОШЕНКА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

П.З. ЛУГОВИЙ
В.Ф. МЕЙШ
Ю.А. МЕЙШ

ДИНАМІКА КОНСТРУКТИВНО-НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНКОВИХ СТРУКТУР

МОНОГРАФІЯ

P.Z. LUGOVYY
V.F. MEISH
YU.A. MEISH

Dynamics of Structurally Inhomogeneous Shells Structures

MONOGRAPH

Київ
Видавництво Ліра-К
2022

УДК 539.3
Л83

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка Національної академії наук України (протокол № 8 від 31 серпня 2021 року)

Рецензенти:
О.Я. Григоренко, член – кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
А.П. Дзюба, доктор технічних наук, професор Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара

Луговий П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А.
Л83 Динаміка конструктивно-неоднорідних оболонкових структур: монографія / П.З. Луговий, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш; під ред. акад. НАН України О.М. Гузя. Київ : Видавництво Ліра-К, 2022. 326 с.
ISBN 978-617-520-320-0

Монографія присвячена науковим і практичним питанням дослідження динамічних процесів в конструктивно неоднорідних оболонкових структурах складної геометрії. Для визначення міцності, довговічності і працездатності таких елементів і конструкцій, в першу чергу, необхідно визначити їх напружено-деформований стан і характер коливань як на етапі проектування, так і під час експлуатаційних і можливих аварійних навантаженнях. Велика увага приділяється використанню та розвитку аналітичних, скінченно-різницевих і скінченно-елементних методів розв'язку поставлених задач. Проведені дослідження дозволяють правильно вибрати вид рівнянь і методів їх розв'язку при описі динаміки оболонок з конструктивними особливостями і тришарових оболонок з неоднорідним заповнювачем, а також модель пружної основи. У книзі представлені результати багаторічних теоретичних досліджень, в більшій частині прикладних, які знайшли своє застосування в різних галузях техніки.

Для фахівців в області авіації, ракетної техніки, суднобудування, атомної енергетики, а також аспірантів і студентів відповідних спеціальностей.

The monograph is devoted to scientific and practical issues of studying dynamic processes in structurally inhomogeneous shell structures of complex geometry. To determine the strength, durability and performance of such elements and structures, first of all, it is necessary to determine their stress-strain state and the nature of oscillations both at the design stage and during operational and possible emergency loads. Much attention is paid to the use and development of analytical, finite-difference and finite-element methods for solving problems. The studies carried out make it possible to correctly choose the type of equations and the method for solving them when describing the dynamics of shells with structural features and three-layer shells with an inhomogeneous filler, as well as an elastic foundation model. The book presents the results of many years of theoretical research, mostly applied, which have found their application in various fields of technology.

The monograph is intended to specialists in rocket technology, shipbuilding, nuclear energy, as well as graduate students and students of relevant specialties.

УДК 539.3

ISBN 978-617-520-320-0

ЗМІСТ

CONTENT

ВСТУП

Сучасну промисловість і будівництво неможливо уявити без широкого спектра застосування оболонкових конструкцій різної форми і структури. Тонкостінні оболонкові конструкції складають дуже широкий клас. Форми об'єктів ¸ які складають цей клас, досить різноманітні, як і багато областей техніки, в яких вони зустрічаються. В машинобудуванні – це корпуси різних машин, лопатки турбін; у цивільному і промисловому будівництві – покриття і перекриття, навіси; в кораблебудуванні – корпуси суден, сухих і плавучих доків; в авіабудуванні – фюзеляжі і крила літаків; в атомній енергетиці – захисні оболонки атомних реакторів; у ракетобудуванні – корпуси ракет; у транспортних системах – трубопроводи різного призначення.

Для оболонкових конструкцій висуваються жорсткі умови експлуатації. Тому розрахунок таких конструкцій виключно відповідальний і разом з тим дуже складний.

Вказаними обставинами пояснюється велика увага, яка приділяється різним оболонковим теоріям.

Побудова теорій оболонок пов'язана з використанням гіпотез або спрощуючих пропозицій, за допомогою яких вихідні співвідношення тривимірної теорії пружності зводяться до двовимірних рівнянь, які описують деформацію її серединної поверхні. В монографії викладено підходи до розв'язання різних класів задач динаміки як ізотропних, так і ортотропних неоднорідних оболонок з конструктивними особливостями на основі класичної і уточненої теорій оболонок і стрижнів.

У першому розділі викладено основні відомості з застосування теорії оболонок до розв'язання відповідних задач при використанні класичної, уточненої теорій оболонок і стрижнів. Основні рівняння руху оболонок в класичній і зсувній теорії С.П. Тимошенка виводяться з застосуванням варіаційних принципів стаціонарності Гамільтона-Остроградського і Рейснера. З допомогою класичних методів задачі визначення напружено-деформованого стану оболонок розв'язуються напряму, використовуючи системи диференціальних рівнянь, побудованих на основі відповідних гіпотез. Точні розв'язки можливі тільки для простих випадків геометрії оболонок, навантажень і граничних умов. Наближеними методами може бути розв'язане більш широке коло класичних задач. Результати в цьому випадку мають форму рядів, в яких після дослідження збіжності відкидаються молодші члени. Принципова перевага класичних методів полягає в тому, що вони забезпечують глибоке розуміння досліджуваної проблеми. Це часто дає можливість оцінити достовірність результатів, отриманих чисельними методами. В розділі наведені приклади точного і наближених розв'язків широкого кола осесиметричих і неосесиметричних прикладних задач теорії оболонок.

В другому розділі наведено результати подальшого розвитку скінченно-різницевих методів розв'язку задач нестаціонарної динаміки неоднорідних складених і тришарових оболонок обертання, які базуються на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих схем по просторовим координатам та явній скінчено – різницевій схемі по часовій координаті. Досліджені коливання циліндричних оболонок некругового перерізу при нестаціонарних навантаженнях. Значна увага приділена чисельному дослідженню динаміки конічних оболонок і панелей змінної товщини з врахуванням дії навколишніх пружних середовищ. Приведено постановку та алгоритми розв'язування задач взаємодії оболонок обертання з ґрунтом в рамках моделі трикомпонентного нелінійного в'язко – пружного середовища згідно моделі В. Ляхова. В ряді випадків проведено теоретичне дослідження умов стійкості скінченно – різницевих схем. Для задач взаємодії циліндричних та сферичних оболонок з ґрунтом розроблено чисельний алгоритм розв'язку вказаних задач, який базується на застосуванні чисельного методу Мак – Кормака. Отримано чисельні результати, які дозволяють проводити детальний аналіз коливальних процесів динаміки оболонкових конструкцій при взаємодії з пружним середовищем різної структури.

В третьому розділі розв'язані більш складні задачі динаміки конструктивно-неоднорідних оболонок, оскільки метод скінченних елементів може бути узагальнений практично на необмежений клас задач. Для збільшення ймовірності отримати достовірний і зрозумілий результат скінченно-елементним методом необхідні знання принципів і методів реалізації цього методу, глибоке розуміння механічної поведінки конструкції у застосованій області аналізу. Для цього виводяться рівняння руху для кожної конкретної задачі, щоб більш свідомо створити скінченно-елементну модель, адекватну динамічному процесу досліджуваної конструкції. Два основних аспекти динамічного аналізу відрізняють його від статичного аналізу По-перше, динамічні навантаження накладаються як функції часу. По-друге, ці навантаження, які змінюються з часом, індукують відгук конструкції, який змінюється з часом (переміщення, швидкості, прискорення, сили і напруження). Ця залежність від часу динамічних характеристик робить динамічний аналіз більш складним і більш реалістичним, в порівнянні з статичним аналізом.

В розділі основна увага приділена дослідженню динаміки тришарових оболонок обертання з дискретно-неоднорідним легким¸ армованим ребрами заповнювачем.

В монографії наведені результати довгострокових досліджень по вказаній тематиці, які проводились в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Автори використовували в основному отримані сумісні результати, а також деякі відомі літературні дані. Матеріали розв'язків конкретних задач представлені у вигляді таблиць і графіків, які зручно використовувати для наукових співробітників, викладачів, інженерів, а також для аспірантів і студентів відповідних спеціальностей.

Автори висловлюють глибку вдячність редактору видання академіку НАН України О.М. Гузю, рецензентам монографії член-коресподенту НАН України О.Я. Григоренку і доктору технічних наук, професору А.П. Дзюбі за корисні зауваження по рукопису.

В підготовці монографії значну допомогу надали учні авторів, а також співробітники відділу будівельної механіки тонкостінних конструкцій. Всім їм автори висловлюють щиру подяку.

РОЗДІЛ 1

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ОБОЛОНКОВИХ СТРУКТУР ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ КЛАСИЧНИХ МЕТОДІВ

Передмова

Монографія присвячена розробці теоретичних методів розв'язання відповідних крайових задач теорії оболонок і аналізу на їх основі особливостей напружено-дефомованого стану в оболонках з різною геометрією, конструктивними особливостями, тріщинами, температурними напруженнями і визначити їх міцність і можливість продовження терміну експлуатації. Оболонки, в залежності від своєї конфігурації, діляться на тонкі $h/R<0,05$, середньої товщини $0,3>h/R>0,05$ і товсті $h/R>0,3$, де h – товщина оболонки, R – мінімальний радіус кривизни оболонки [16]. Наприклад, корпус парогенератора являє собою тонку оболонку, тому що відношення його товщини до радіусу $0,036>h/R>0,03$, а його теплообмінна трубка являє собою оболонку середньої товщини – $h/R = 1,5/8 = 0,1875$. Слід зазначити, що чим тонше оболонка, тим точніше виконується припущення про сталість напружень по товщині і тим більш точніше проводяться розрахунки по безмоментній теорії.

Отже, при розрахунках на міцність тонких оболонок в залежності від характеру розподілу зовнішніх навантажень, опорних закріплень, застосовується моментна або безмоментна теорія. При цьому передбачається рівномірний розподіл напружень по поздовжніх і поперечних перерізах оболонок (відсутність в цих перетинах згинальних, крутних моментів і поперечних сил). Для оболонок, у яких $h/R > 0,05$, слід використовувати рівняння теорії оболонок згідно гіпотез С.П. Тимошенка [38], де враховуються зсувні напруження. При вирішенні крайових задач для оболонок з отворами виникають суттєві труднощі математичного характеру. При їх подоланні запропоновано [16] розбити завдання для оболонок з отворами на три групи: завдання для оболонок з малими отворами, з отворами середніх розмірів, з отворами великих розмірів. Рішення конкретних завдань показує, що для оболонок першої групи характерний геометричний розмір $r_0/\sqrt{Rh}$ змінюється в межах $0 < r_0/\sqrt{Rh} < 1$, для другої групи в межах $1 \le r_0/\sqrt{Rh} \le 4$, для третьої групи в межах $r_0/\sqrt{Rh} > 4$ (r_0 – параметр, що характеризує розміри отвору, R, h – радіус серединної поверхні і товщина оболонки). Для вирішення завдань, що відносяться до перших двох груп, можна використовувати рівняння теорії пологих оболонок, а в третьому випадку застосовують рівняння загальної теорії оболонок.

Бажано також удосконалювати експериментальні методи для тестування теоретичних розв’язків для оболонкових конструкцій при екстремальних навантаженнях, розробити методи для неруйнівного контролю напружень в твердих тілах [15].

Коли вибрані відповідні рівняння, які описують механічну поведінку досліджуваної оболонкової структури, постає питання застосування методу розв'язку цих рівнянь. У першому розділі викладено основні відомості з застосування теорії оболонок до розв'язання відповідних задач при використанні класичної, уточненої теорій оболонок і стрижнів. З допомогою класичних методів задачі визначення напружено-деформованого стану оболонок розв'язуються напряму, використовуючи системи диференціальних рівнянь, побудованих на основі відповідних гіпотез. Точні розв'язки можливі тільки для простих випадків геометрії оболонок, навантажень і граничних умов. Наближеними методами може бути розв'язане більш широке коло класичних задач. Результати в цьому випадку мають форму рядів, в яких утримується відповіда кількість членів ряду, яка забезпечує практичну збіжність результатів. Принципова перевага класичних методів полягає в тому, що вони забезпечують глибоке розуміння досліджуваної проблеми. Це часто дає можливість оцінити достовірність результатів, отриманих чисельними методами. В даному розділі наведені приклади точного і наближених розв'язків широкого кола осесиметричих і неосесиметричних прикладних задач теорії оболонок.

Оскільки широке використання в різних галузях техніки оболонкових конструкцій, при дії на них різноманітних навантажень, дозволяє вирішити проблему матеріаломісткості при збереженні необхідної міцності і достатньої легкості, то розглянемо основні положення та рівняння оболонкових елементів. На них базується теорія оболонкових конструкцій різної геометрії і фізико-механічних властивостей.

1.1. Основні рівняння теорії гладких оболонок в геометрично нелінійній теорії

1.1.1. Геометричні залежності нелінійної теорії тонкостінних оболонок

При виводі основних співвідношень для тонкостінних оболонок, у яких товщина суттєво менша лінійних розмірів, вводиться серединна поверхня як геометричне місце точок, які рівновіддалені від зовнішньої і внутрішньої поверхонь.

Оболонку, як тривимірне тіло, віднесемо до ортогональної системи координат α_1, α_2, z, в якої α_1, α_2 – координати на висхідній серединній поверхні, а координата z відраховується вверх по нормалі до неї. Диференціал дуги в цій системі координат визначається виразом $dx^2 = H_1^2 d\alpha_1^2 + H_2^2 d\alpha_2^2 + H_3^2 dz^2$, де величини H_1, H_2, H_3 являються коефіцієнтами Ламе і визначаються за формулами:

$$H_1 = A_1(\alpha_1,\alpha_2)\,(1+k_1 z),\ H_2 = A_2(\alpha_1,\alpha_2)\,(1+k_2 z),\ H_3 = 1, \qquad (1.1)$$

де k_1, k_2 – головні кривизни серединної поверхні оболонки; причому $k_1=1/R_1$, $k_2=1/R_2$, R_1, R_2 – радіуси головних кривизн; $A_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $A_2(\alpha_1,\alpha_2)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми.

Коефіцієнти першої квадратичної форми A_1, A_2 пов'язані з величинами k_1, k_2 відомими співвідношеннями Кодаці – Гауса [34]:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(k_2 A_2) = k_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(k_1 A_1) = k_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\right) = -k_1 k_2 A_1 A_2 . \qquad (1.2)$$

Деформації довільної точки оболонки в просторовому випадку характеризується вектором переміщень, компоненти якого:

$$U_1^Z(\alpha_1, \alpha_2, z), \ \ U_2^Z(\alpha_1, \alpha_2, z), \ \ U_3^Z(\alpha_1, \alpha_2, z).$$

При побудові теорії оболонок будемо використовувати лінійну апроксимацію переміщень по товщині оболонки:

$$U_1^Z = U_1(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$U_2^Z = U_2(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$U_3^Z = U_3(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_3(\alpha_1, \alpha_2), \qquad (1.3)$$

де $U_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $U_2(\alpha_1,\alpha_2)$, $U_3(\alpha_1,\alpha_2)$ – переміщення точок серединої поверхні оболонки.

Згідно цих позначень, отримаємо наступні вирази для компонент деформацій [34], в яких деформації подовжень і зсувів є величини більш високого порядку малості, ніж кути повороту тому маємо наступні вирази для деформацій:

$$\varepsilon_{11}^Z = e_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2 + z(\kappa_{11} + \theta_1 \kappa_{13}),$$

$$\varepsilon_{22}^Z = e_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2 + z(\kappa_{22} + \theta_2 \kappa_{23}),$$

$$\varepsilon_{33}^Z = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

$$\varepsilon_{12}^Z = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1\theta_2 + z(\tau_1 + \tau_2 + \theta_1\kappa_{23} + \theta_2\kappa_{13}),$$

$$\varepsilon_{13}^Z = \varphi_1 + \theta_1, \quad \varepsilon_{23}^Z = \varphi_2 + \theta_2 . \qquad (1.4)$$

1.1.2. Уточнена модель оболонок типу С. П. Тимошенка

Як відомо, основним завданням теорії пружних оболонок є вивчення їх напружено-деформованого стану під дією деяких заданих статичних, динамічних чи іншого виду навантажень. Складність рішення задач про напружений стан оболонок як просторових тіл з позицій теорії пружності викликають необхідність застосування розрахункових схем, які засновані на приведенні тривимірних задач до двовимірних, після вирішення яких можна наближено відновити поля зсувів, деформацій і напружень в досліджуваній оболонці. Перехід від просторових співвідношень теорії пружності до наближених співвідношень двовимірної теорії оболонок пов'язаний з прийняттям низки додаткових гіпотез. Відповідно до моделі оболонок згідно гіпотез С.П. Тимошенка [38] при описі закону зміни переміщень по товщині оболонки вважатимемо, що нормальний елемент, спочатку перпендикулярний до серединної поверхні до деформації, не залишається перпендикулярним до неї після деформації, а повертається на деякий кут, не викривляючись і не змінюючи своєї довжини. Ця гіпотеза доповнюється припущенням, що в співвідношеннях узагальненого закону Гука представляється можливим нехтуванням поперечними нормальними напруженнями.

Відповідно до прийнятого, маємо лінійний закон розподілу переміщень по товщині:

$$U_1^Z = U_1(\alpha_1,\alpha_2) + z\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$
$$U_2^Z = U_2(\alpha_1,\alpha_2) + z\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$
$$U_3^Z = U_3(\alpha_1,\alpha_2)\,, \tag{1.5}$$

де U_1, U_2, U_3 – переміщення точок серединної поверхні оболонки в напрямках α_1, α_2, z відповідно; φ_1, φ_2 – кути повороту нормального елементу в площинах $\alpha_1 = const$, $\alpha_2 = const$.

Поперечні дотичні напруження $\sigma_{13}(\alpha_1,\alpha_2,z)$ і $\sigma_{23}(\alpha_1,\alpha_2,z)$ змінюються по товщині оболонки по закону:

$$\sigma_{13}(\alpha_1,\alpha_2,z) = f_1(z)\sigma_{13}^0(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$
$$\sigma_{23}(\alpha_1,\alpha_2,z) = f_1(z)\sigma_{23}^0(\alpha_1,\alpha_2) \tag{1.6}$$

де заздалегідь задана функція $f_1(z)$ вибирається з умов:

$$\sigma_{13}(\alpha_1,\alpha_2,\pm h/2) = 0\,,\ \ \sigma_{23}(\alpha_1,\alpha_2,\pm h/2) = 0\,.$$

Використовуючи розподіл (1.5) і співвідношення (1.6) можна отримати наступні вирази для величин деформацій:

$$\varepsilon_{11}^Z = \varepsilon_{11}(\alpha_1,\alpha_2) + z\kappa_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$
$$\varepsilon_{22}^Z = \varepsilon_{22}(\alpha_1,\alpha_2) + z\kappa_{22}(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$
$$\varepsilon_{12}^Z = \varepsilon_{12}(\alpha_1,\alpha_2) + z\kappa_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$
$$\varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1\theta_2, \quad \kappa_{12} = \tau_1 + k_1\omega_2 + \tau_2 + k_2\omega_1\,,$$
$$\varepsilon_{13}^Z = \varepsilon_{13}\,, \qquad \varepsilon_{23}^Z = \varepsilon_{23}\,. \tag{1.7}$$

В формулах (1.7) $\varepsilon_{11}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\varepsilon_{22}(\alpha_1,\alpha_2)$ – нормальні деформації в напрямках α_1, α_2 відповідно; $\varepsilon_{12}(\alpha_1,\alpha_2)$ – деформації зсуву; $\kappa_{11}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\kappa_{22}(\alpha_1, \alpha_2)$ – зміна кривизни в напрямках α_1, α_2; $\kappa_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$ – кручення координатної поверхні; $\varepsilon_{13}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\varepsilon_{23}(\alpha_1,\alpha_2)$ – деформації поперечного зсуву в площинах α_1, α_2.

Для зазначених вище величин деформацій мають місце такі вирази, які пов'язують їх з переміщеннями координатної поверхні:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}U_2 + k_1U_3 + \frac{1}{2}\Theta_1^2\,,$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}U_1 + k_2U_3 + \frac{1}{2}\Theta_2^2\,,$$
$$\omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}U_1\,, \qquad \omega_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}U_2\,,$$
$$\kappa_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\varphi_1\,, \qquad \kappa_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\varphi_1\,,$$
$$\tau_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\varphi_1\,, \qquad \tau_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\varphi_2\,,$$
$$\Theta_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_1} - k_1U_1\,, \quad \Theta_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_2} - k_2U_2\,,$$
$$\varepsilon_{11} = \varphi_1 + \Theta_1\,, \qquad \varepsilon_{22} = \varphi_2 + \Theta_2\,. \tag{1.8}$$

Розв'язавши рівняння узагальненого закону Гука щодо компонентів напруженого стану (в припущенні, що нормальними напруженнями можна знехтувати в порівнянні з іншими), виразимо останні через компоненти деформацій. Однак незалежні апроксимації переміщень (1.5) і поперечних дотичних напружень (1.6) вносять формальне протиріччя в узагальнений закон Гука. Для усунення зазначених протиріч використовується змішаний варіаційний принцип Рейснера [63].

Для виведення співвідношень пружності, рівнянь коливань, граничних умов при виразах (1.5), (1.6) можна застосувати варіаційний принцип Рейснера для динамічних процесів [63]. В загальному вигляді варіаційне рівняння Рейснера ма вигляд:

$$\int_{t_2}^{t_1}[\delta(R-T)-\delta A]dt=0\,, \tag{1.9}$$

де R – функціонал Рейснера, T – кінетична енергія, A – робота зовнішніх сил.

Вираз для функціонала Рейснера записується у вигляді:

$$R=\int\limits_S\int\limits_z\int\Big[\sigma_{11}\varepsilon_{11}^z+\sigma_{22}\varepsilon_{22}^z+\sigma_{12}\varepsilon_{12}^z+\sigma_{13}\varepsilon_{13}^z+\sigma_{23}\varepsilon_{23}^z-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{11}^2}{E_1}+\frac{\sigma_{22}^2}{E_2}-2\nu_{21}\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{E_2}+\frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}}+\frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}}+\frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}}\right)\Bigg]dV\,, \tag{1.10}$$

де елементарний об'єм тіла задається формулою:

$$dV=A_1A_2(1+zk_1)dzd\alpha_1d\alpha_2\,,\ z\in[-h/2,h/2].$$

Вираз для кінетичної енергії записується у вигляді:

$$T=\frac{1}{2}\int\limits_V\rho\left[\left(\frac{\partial U_1^z}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2^z}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U_3^z}{\partial t}\right)^2\right]dV\,, \tag{1.11}$$

де ρ – густина матеріалу, яка в загальному випадку є функцією координат.

У варіаційному рівнянні (1.9) варіації напружень і переміщень є незалежними. Для того щоб, задовольнялося рівняння (1.9), досить вимагати рівності нулю множників при незалежних варіаціях.

$$\delta R=\int\limits_S\int\limits_z\int\Big[\sigma_{11}\varepsilon_{11}^z+\sigma_{22}\varepsilon_{22}^z+\sigma_{12}\varepsilon_{12}^z+\sigma_{13}\varepsilon_{13}^z+\sigma_{23}\varepsilon_{23}^z+$$

$$+\left(\varepsilon_{11}^z-\frac{1}{E_1}\sigma_{11}+\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22}\right)\delta\sigma_{11}+\left(\varepsilon_{22}^z-\frac{1}{E_2}\sigma_{22}+\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}\right)\delta\sigma_{22}+$$

$$+\left(\varepsilon_{12}^z-\frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}\right)\delta\sigma_{12}+\left(\varepsilon_{13}^z-\frac{1}{G_{13}}\sigma_{13}\right)\delta\sigma_{13}+\left(\varepsilon_{23}^z-\frac{1}{G_{23}}\sigma_{23}\right)\delta\sigma_{23}\Bigg]dV\,. \tag{1.12}$$

Оскільки варіації напружень входять тільки в вираз δR, то множники при варіаціях напружень прирівнюються до нуля. Таким чином, отримаємо наступні дві групи співвідношень пружності для даної моделі. Перша група співвідношень пружності виконуються в кожній точці оболонки:

$$\varepsilon_{11}^z=\frac{1}{E_1}\sigma_{11}-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22}\,,\qquad \varepsilon_{22}^z=-\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}+\frac{1}{E_2}\sigma_{22}\,,$$

$$\varepsilon_{12}^z=\frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}\,. \tag{1.13}$$

Розв'язавши співвідношення (1.13) відносно напружень, отримаємо наступні залежності між напруженнями і деформаціями:

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11}^{z} + B_{12}\varepsilon_{22}^{z}, \quad \sigma_{22} = B_{21}\varepsilon_{11}^{z} + B_{22}\varepsilon_{22}^{z},$$

$$\sigma_{12} = B_{66}\varepsilon_{12}^{z}, \qquad (1.14)$$

де

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \; B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{E_1\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \; B_{66} = G_{12}$$

Друга група співвідношень пружності (останні два доданки в (1.12)) представляють собою інтегральні рівняння. Згідно прийнятим пропозиціям (1.6), варіації поперечних дотичних напружень $\delta\sigma_{13} = f_1(z)\sigma_{i3}^{0}(\alpha_1,\alpha_2)$, $i = 1,2$, тому вказані співвідношення пружності можуть бути виконані тільки інтегрально по товщині оболонки і слугують для визначення функцій $\sigma_{i3}^{0}(\alpha_1,\alpha_2)$:

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\varepsilon_{13}^{z} - \frac{\sigma_{13}}{G_{13}}\right)f_1(z)dz = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\varepsilon_{23}^{z} - \frac{\sigma_{23}}{G_{23}}\right)f_1(z)dz = 0. \qquad (1.15)$$

Розв'язуючи рівняння (1.15) відносно величин $\sigma_{i3}^{0}(\alpha_1,\alpha_2)$, отримаємо:

$$\sigma_{13}^{0}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{I_1}{I_2}G_{13}\varepsilon_{13}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\sigma_{23}^{0}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{I_1}{I_2}G_{23}\varepsilon_{23}(\alpha_1,\alpha_2), \qquad (1.16)$$

де

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f_1(z)dz, \; I_2 = \int_{-h/2}^{h/2}\left[f_1(z)\right]^2 dz.$$

Варіаційне рівняння (1.9) з урахуванням співвідношень (1.14), (1.16) набирає вигляд:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta(U-T) - \delta A\right]dt, \qquad (1.17)$$

де U – потенціальна енергія, T – кінетична енергія, A – робота зовнішніх сил.

Вираз для δU після заміни деформацій співвідношеннями (1.10) приймає вигляд:

$$\delta U = \iint\limits_{S}\int\limits_{z}\left[\sigma_{11}\delta(\varepsilon_{11}+z\kappa_{11}) + \sigma_{22}\delta(\varepsilon_{22}+z\kappa_{22}) + \right.$$

$$\left. + \sigma_{12}\delta(\varepsilon_{12}+z\kappa_{12}) + \sigma_{13}\delta\varepsilon_{13} + \sigma_{13}\delta\varepsilon_{13}\right]dV \qquad (1.18)$$

У функціоналі (1.18) вводяться інтегральні характеристики величин напруження – зусилля і моментів за такими формулами:

$$T_{11} = \int_z \sigma_{11}(1+zk_2)dz, \quad T_{22} = \int_z \sigma_{22}(1+zk_1)dz,$$

$$T_{12} = \int_z \sigma_{12}(1+zk_2)dz, \quad T_{21} = \int_z \sigma_{21}(1+zk_1)dz,$$

$$M_{11} = \int_z \sigma_{11}z(1+zk_2)dz, \quad M_{22} = \int_z \sigma_{22}z(1+zk_1)dz,$$

$$M_{12} = \int_z \sigma_{12} z(1+zk_2)dz\ , \quad M_{21} = \int_z \sigma_{21} z(1+zk_1)dz\ ,$$

$$T_{13} = \int_z \sigma_{13}(1+zk_2)dz\ , \qquad T_{23} = \int_z \sigma_{23}(1+zk_1)dz\ . \tag{1.19}$$

На підставі тотожності:

$$T_{12} - k_2 M_{21} = T_{21} - k_1 M_{12}\ ,$$

яка слідує з формул (1.19), вводяться нові позначення:

$$M_{12} = M_{21} = H\ ,\ T_{12} = S + k_2 H\ ,\ T_{21} = S + k_1 H\ . \tag{1.20}$$

В результаті, вираз (1.18) прийме вигляд:

$$\delta U = \iint_S \left[T_{11}\delta\varepsilon_{11} + T_{22}\delta\varepsilon_{22} + S\delta\varepsilon_{12} + T_{13}\delta\varepsilon_{13} + T_{23}\delta\varepsilon_{23} + \right.$$

$$\left. + M_{11}\delta\kappa_{11} + M_{22}\delta\kappa_{22} + H\delta(\tau_1 + \tau_2) \right] dS \tag{1.21}$$

де $dS = A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$.

На основі формул (1.11) и (1.5), варіація кінетичної енергії запишеться у вигляді:

$$\delta T = -\int_{t_1}^{t_2}\iint_S \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left[\left(I_1^* \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + I_2^* \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \delta U_i + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(I_2^* \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + I_3^* \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \delta\varphi_i \right] + I_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \delta U_3 \right\} dSdt\ , \tag{1.22}$$

де інерційні коефіцієнти I_1^*, I_2^*, I_3^* мають вигляд:

$$I_1^* = \int_z \rho(z)dz\ ,\ I_2^* = \int_z \rho(z)zdz\ ,\ I_3^* = \int_z \rho(z)z^2 dz \tag{1.23}$$

У виразі (1.22) викинуті доданки, які відносяться до граничних умов на кінцях t_1 і t_2 часового інтервалу.

Варіацію роботи зовнішніх сил представимо у вигляді:

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2\ , \tag{1.24}$$

де δA_1 відповідає варіації роботи зовнішніх поверхневих навантажень, приведених до початкової поверхні оболонки:

$$\delta A_1 = \iint_S \left(\sum_{i=1}^{3} P_1 \delta U_i + \sum_{i=1}^{2} m_i \delta\varphi_i \right) dS\ , \tag{1.25}$$

а δA_2 відповідає варіації роботи зовнішніх навантажень, які діють в торцевих перетинах оболонки Γ_1 і Γ_2.

$$\delta A_2 = \int_{\Gamma_1} \left(T_{11}^* \delta U_1 + \overline{T}_{12}^* \delta U_2 + \overline{T}_{13}^* \delta U_3 + M_{11}^* \delta\varphi_1 + M_{12}^* \delta\varphi_2 \right) A_2 d\alpha_2 +$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \left(T_{21}^* \delta U_1 + T_{22}^* \delta U_2 + \overline{T}_{23}^* \delta U_3 + M_{21}^* \delta\varphi_1 + M_{22}^* \delta\varphi_2 \right) A_1 d\alpha_1\ . \tag{1.26}$$

У виразах (1.25), (1.26) величини P_i, m_i відповідають компонентам узагальненого вектора поверхневого навантаження; T_{11}^*, T_{12}^*, T_{13}^*, M_{11}^*, M_{12}^* $(1 \Leftrightarrow 2)$ – задані величини зусиль-моментів діючих на границях оболонки.

На основі (1.21), (1.22) і (1.24), із умови стаціонарності функціоналу (1.9), після виконання операцій варіювання і інтегрування по частинам, прирівнюємо до нуля вирази при незалежних варіаціях δU_1, δU_2, δU_3, $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ і отримаємо систему нелінійних рівнянь коливань оболонки і відповідні узгоджені граничні умови.

Рівняння коливань можна представити у вигляді:

$$\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2T_{11})-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_{22}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[A_1(S+k_1H)\right]+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(S+k_2H)\right\}+k_1\overline{T}_{13}+P_1=I_1^*\frac{\partial^2U_1}{\partial t^2}+I_2^*\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[A_2(S+k_2H)\right]+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(S+k_1H)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1T_{22})-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_{11}\right\}+$$

$$+k_2\overline{T}_{23}+P_2=I_1^*\frac{\partial^2U_2}{\partial t^2}+I_2^*\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2\overline{T}_{13})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1\overline{T}_{23})\right]-k_1T_{11}-k_2T_{22}+P_3=I_1^*\frac{\partial^2U_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2M_{11})-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{22}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H)+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H\right]-$$

$$-T_{13}+m_1=I_2^*\frac{\partial^2U_1}{\partial t^2}+I_3^*\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H)-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}H+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1M_{22})-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{11}\right]-$$

$$-T_{23}+m_2=I_2^*\frac{\partial^2U_2}{\partial t^2}+I_3^*\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}, \qquad (1.27)$$

$$\overline{T}_{13}=T_{13}+T_{11}\Theta_1+S\Theta_2,\qquad \overline{T}_{23}=T_{23}+T_{22}\Theta_2+S\Theta_1.$$

Граничні умови для системи рівнянь (1.27) записуються для контуру Γ_1:

$$T_{11}=T_{11}^* \quad \text{або} \quad U_1=U_1^*,$$

$$S+k_2H=T_{12}^* \quad \text{або} \quad U_2=U_2^*,$$

$$\overline{T}_{13}=T_{13}^* \quad \text{або} \quad U_3=U_3^*,$$

$$M_{11}=M_{11}^* \quad \text{або} \quad \varphi_1=\varphi_1^*,$$

$$H=M_{12}^* \quad \text{або} \quad \varphi_2=\varphi_2^*. \qquad (1.28)$$

Аналогічно записуються граничні умови на контурі Γ_2 ($1\Leftrightarrow 2$). В граничних умовах (1.28) враховано, що на контурі Γ_1 можуть бути задані переміщення вихідної поверхні U_1^*, U_2^*, U_3^*, φ_1^*, φ_2^*.

Нульові початкові умови для рівнянь коливань (1.27) записуються у вигляді при $t = 0$:

$$U_1=U_2=U_3=\varphi_1=\varphi_2=0,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}=\frac{\partial U_2}{\partial t}=\frac{\partial U_3}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=0. \qquad (1.29)$$

1.1.3. Класична модель теорії тонких оболонок

Класична модель теорії оболонок ґрунтується на припущеннях, введених вперше Г. Кірхгофом в теорії пластин. Суть цих припущень полягає в наступному. Спочатку перпендикулярний до вихідної поверхні елемент після деформації залишається нерозтяжним і перпендикулярним до деформованої вихідної поверхні. Також вважається, що представляється можливим знехтувати поперечним нормальним напруженням в співвідношеннях узагальненого закону Гука. Сформульовані гіпотези більш жорсткі і стиснені для деформацій, ніж відповідні гіпотези при розгляді варіанту теорії оболонок типу С. П. Тимошенка. Перша гіпотеза еквівалента допущенню про відсутність деформацій зсувів і в нормальних до серединної поверхні площинах.

На підставі цього, природно отримати рівняння коливань класичної теорії Кірхгофа-Лява з відповідних співвідношень теорії оболонок згідно гіпотез С. П. Тимошенка [38], як окремий випадок при:

$$\varepsilon_{13}^{z} = \varepsilon_{23}^{z} = 0 \tag{1.30}$$

Розподіл переміщень по товщині оболонки приймається у вигляді:

$$\begin{gathered} U_1^z = U_1(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2)\,, \\ U_2^z = U_2(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)\,, \\ U_3^z = U_3(\alpha_1, \alpha_2), \end{gathered} \tag{1.31}$$

де U_1, U_2, U_3 – переміщення серединної поверхні α_1, α_2, z відповідно; φ_1, φ_2 – кути повороту нормального елементу.

На відміну від моделі оболонок С.П. Тимошенка, незалежними змінними являються величини U_1, U_2, U_3, а функції φ_1 і φ_2 зв'язані залежностями згідно формул (1.30):

$$\varphi_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} + k_1 U_1\,, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} + k_2 U_2\,. \tag{1.32}$$

Послідовно здійснюючи в рівняннях коливань теорії оболонок типу С. П. Тимошенка перехід згідно формул (1.30) – (1.32), приходимо до групи рівнянь класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява.

При цьому, рівняння коливань в зусиллях-моментах запишуться вигляді:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_{22} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[A_1(S + k_1H)\right] + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(S + k_2H)\right\} + k_1\overline{T}_{13} + P_1 = I_1^*\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \\
\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(S + k_2H) + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(S + k_1H) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1T_{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_{11}\right\} + k_2\overline{T}_{23} + P_2 = I_1^*\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}\,, \\
\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2\overline{T}_{13}) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1\overline{T}_{23})\right] - k_1T_{11} - k_2T_{22} + P_3 = I_1^*\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}\,, \\
\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{22} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1H) + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H\right] - T_{13} + m_1 = 0\,, \\
\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2H) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}H + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1M_{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{11}\right] - T_{23} + m_2 = 0\,, \\
\overline{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\Theta_1 + S\Theta_2\,, \qquad \overline{T}_{23} = T_{23} + T_{22}\Theta_2 + S\Theta_1\,.
\end{gathered} \tag{1.33}$$

У рівняннях коливань (1.33) знехтували інерційними складовими величин кутів повороту нормалі.

Виходячи з рівнянь (1.19), (1.20), (1.7), співвідношення пружності записуються в наступному вигляді:

$$\begin{gathered}
T_{11} = B_{11}h(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22})\,, \\
T_{22} = B_{22}h(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11})\,, \; S = B_{66}h\varepsilon_{12}\,, \\
M_{11} = B_{11}\frac{h^3}{12}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22})\,, \\
M_{22} = B_{22}\frac{h^3}{12}(\kappa_{22} + \nu_{12}\kappa_{11})\,, \; H = B_{66}\frac{h^3}{12}\kappa_{12}\,.
\end{gathered} \tag{1.34}$$

При отриманні співвідношень (1.34) виходячи з формул (1.19), (1.20) нехтуючи доданками $k_i z$ в порівнянні з одиницею, оскільки їх збереження не збільшує точності кінцевих результатів, а лише призводить до значних ускладнень систематичного характеру.

Величини деформацій у співвідношеннях (1.34) виражаються через переміщення серединної поверхні U_1, U_2, U_3 згідно формул (1.8) з врахуванням залежностей (1.32).

Граничні умови для системи рівнянь (1.33) на контурі Γ_1 записуються у вигляді:

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ або } U_1 = U_1^*,$$
$$S + k_2 H = T_{12}^* \text{ або } U_2 = U_2^*,$$
$$\overline{T}_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = T_{13}^* \text{ або } U_3 = U_3^*,$$
$$M_{11} = M_{11}^* \text{ або } \varphi_1 = \varphi_1^*, \qquad (1.35)$$

Умови на контурі Γ_2 отримуються циклічною заміною індексів ($1 \Leftrightarrow 2$) у співвідношеннях (1.35).

Нульові початкові умови для системи рівнянь коливань (1.36), (1.37), (1.11) при $t = 0$ мають вигляд:

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0,$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial U_2}{\partial t} = \frac{\partial U_3}{\partial t} = 0. \qquad (1.36)$$

1.1.4. Рівняння коливань циліндричних оболонок

Оскільки більшість трубчатих елементів мають циліндричну форму і експлуатуються при осесиметричних навантаженнях, то розглянемо рівняння коливань циліндричних оболонок постійної товщини.

Запишемо лінійні рівняння руху гладких ізотропних циліндричних оболонок з урахуванням нормальних і кутових деформацій. Якщо покласти в рівняннях (1.27)

$$A_1=1,\ A_2=R,\ \kappa_1=0,\ \kappa_2=1/R, \qquad (1.37)$$

без урахування координати α_2 і компонент вектора навантаження, то отримаємо рівняння такого виду:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} = \rho h \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{13}}{\partial x} - \frac{M_{22}}{R} - T_{33} = \rho \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2} \qquad (1.38)$$
$$T_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(e_{11} + \nu e_{22}) + \frac{\eta_1 I_{31}^2}{I_{33}K_{33}}(e_{33} + K_{11}e_{11} + K_{22}e_{22}) +$$
$$+ \frac{\eta_1 I_{31} I_{32}}{I_{33}K_{33}}(K_{11}\kappa_{11} + K_{22}\kappa_{22}),$$
$$T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(e_{22} + \nu e_{11}) + \frac{\eta_2 I_{31}^2}{I_{33}K_{33}}(e_{33} + K_{11}e_{11} + K_{22}e_{22}) +$$
$$+ \frac{\eta_2 I_{31} I_{32}}{I_{33}K_{33}}(K_{11}\kappa_{11} + K_{22}\kappa_{22}),$$
$$T_{33} = \frac{I_{31}^2}{I_{33}K_{33}}(e_{33} + K_{11}e_{11} + K_{22}e_{22}) + \frac{I_{31}I_{32}}{I_{33}K_{33}}(K_{11}\kappa_{11} + K_{22}\kappa_{22}),$$