

*Медведєв М.Г., Пащенко І.О.*

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

*Підручник*

*Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник  
(лист від 14.05.08. №1.4/18-Г-1088)*



*Київ  
2017*

ББК 22.17  
М42  
УДК 519.21

**Рецензенти:**

*Лопатін О.К.* — зав.кафедрою інформаційних технологій та математики Національної Академії управління, д.ф.-м.н., проф., лауреат державної премії України в галузі науки і техніки.

*Самойленко В.Г.* — д.ф.-м.н., проф., зав. кафедри математичної фізики Київського національного університету ім.Т.Шевченко.

*Оксіюк О.Г.* — к.т.н., доцент.

*Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник  
(лист від 14.05.08. №1.4/18-Г-1088)*

**МЕДВЕДЄВ М.Г., ПАЩЕНКО І.О.**

**М42 Теорія ймовірностей та математична статистика.** Підручник. — К.: Вид-во “Ліра-К”. 2017. — 536 с.

ISBN 978-966-96938-3-9

У підручнику розглядається основний теоретичний матеріал з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» за кредитно-модульною системою згідно вимог Болонської конвенції. Особлива увага приділена доступності викладення матеріалу, який супроводжується великою кількістю прикладів. На електронному носії знаходяться задачі для самостійної роботи та модульного контролю студентів, біографічний довідник.

Для студентів, викладачів та всіх, хто вивчає курс «Теорія ймовірностей та математична статистика»

ББК 22.17  
УДК 519.2

ISBN 978-966-96938-3-9

© М.Г.Медведєв, І.О.Пашенко, 2008  
© Ліра-К, 2008

## ЗМІСТ

<b>Передмова</b> .....	8
<b>МОДУЛЬ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ</b>	
<i>Змістовий модуль 1. Основні поняття теорії ймовірностей</i> .....	15
1. Основні поняття.....	15
2. Основні операції над подіями.....	17
3. Властивості операцій над подіями.....	19
<i>Змістовий модуль 2. Основи комбінаторики</i> .....	21
1. Основні правила комбінаторики.....	21
2. Основні види комбінацій.....	22
<i>Приклади розв’язування задач</i> .....	28
<i>Змістовий модуль 3. Визначення ймовірності події</i> .....	33
1. Аксиоматичне визначення ймовірності події.....	33
2. Статистичне визначення ймовірності події.....	33
3. Класичне визначення ймовірності події.....	36
4. Геометричне визначення ймовірності події.....	37
<i>Коротка історична довідка</i> .....	39
<i>Приклади розв’язування задач</i> .....	40
<i>Змістовий модуль 4. Основні теореми</i> .....	48
1. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.....	48
2. Умовна ймовірність події.....	49
3. Теореми множення ймовірностей подій.....	50
4. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.....	55
5. Використання основних теорем для оцінювання надійності роботи систем.....	56
<i>Приклади розв’язування задач</i> .....	58

<i>Змістовий модуль 5. Формула повної ймовірності. Формула Байєса</i> ....	65
1. Формула повної ймовірності .....	65
2. Формула Байєса .....	65
<i>Приклади розв'язування задач</i> .....	67
<i>Змістовий модуль 6. Повторні випробування</i> .....	74
1. Формула Бернуллі .....	74
2. Формула Пуассона .....	77
3. Локальна теорема Муавра-Лапласа .....	78
4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа .....	79
<i>Приклади розв'язування задач</i> .....	81
<b>МОДУЛЬ 2. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН</b>	
<i>Змістовий модуль 7. Випадкові величини</i> .....	89
1. Поняття випадкової величини. Способи задання та властивості випадкових величин .....	89
2. Математичні операції над випадковими величинами .....	99
<i>Приклади розв'язування задач</i> .....	102
<i>Змістовий модуль 8. Числові характеристики випадкових величин</i> ....	109
1. Основні числові характеристики .....	109
1.1. Математичне сподівання .....	109
1.2. Дисперсія .....	111
1.3. Середнє квадратичне відхилення .....	112
1.4. Мода.....	113
1.5. Медіана .....	114
1.6. Початкові та центральні моменти.....	116
1.7. Асиметрія та ексцес .....	116
1.8. Квантиль .....	119
2. Основні закони розподілів дискретних випадкових величин .....	119
2.1. Біноміальний розподіл.....	119
2.2. Розподіл Пуассона .....	124
2.3. Геометричний розподіл.....	130
2.4. Гіпергеометричний розподіл .....	131
2.5. Індикатор випадкової події A (розподіл Бернуллі) .....	136

3. Ймовірнісні твірні функції .....	136
4. Функції одного випадкового аргумента .....	137
5. Характеристична функція випадкової величини .....	145
6. Основні закони розподілів неперервних випадкових величин .....	148
6.1. Рівномірний закон розподілу.....	148
6.2. Показниковий закон розподілу .....	150
6.3. Нормальний закон розподілу.....	152
6.4. Логарифмічний нормальний закон розподілу.....	165
6.5. Урізаний (ліворуч) нормальний закон розподілу .....	167
6.6. Гамма-розподіл .....	168
6.7. Розподіл Ерланга k- го порядку .....	169
6.8. Нормований Бета – розподіл.....	170
6.9. Розподіл Вейбулла.....	172
7. Закони розподілу випадкових величин, пов'язаних із нормальним законом розподілу .....	173
7.1. Розподіл $\chi^2$ („хі-квадрат”) .....	175
7.2. Розподіл $\frac{\chi^2}{k}$ .....	176
7.3. Розподіл $\chi$ .....	177
7.4. Розподіл $\frac{\chi}{\sqrt{k}}$ .....	178
7.5. Розподіл Стьюдента .....	178
7.6. Розподіл Фішера-Снедекора.....	180
<i>Приклади розв'язування задач</i> .....	181
<b>Змістовий модуль 9. Закон великих чисел</b> .....	197
1. Види збіжності послідовностей випадкових величин.....	197
2. Нерівності теорії ймовірностей .....	198
Нерівність Маркова .....	198
Нерівність Чебишева .....	199
Нерівність Йенсена.....	199
Нерівність Коші-Буняковського-Шварца .....	199
Нерівність Гьольдера .....	199

Нерівність Мінковського .....	200
2. Теореми закону великих чисел .....	200
Теорема Чебишева .....	200
Теорема Бернуллі .....	204
Теорема Пуассона .....	205
Теорема Хінчина .....	205
Теорема Маркова .....	205
3. Центральна гранична теорема .....	206
Теорема Ляпунова .....	207
Теорема Муавра-Лапласа .....	212
<i>Приклади розв'язування задач</i> .....	212
<b>Змістовий модуль 10. Багатовимірні випадкові величини.</b>	
<b>Система двох випадкових величин</b> .....	216
1. Система двох дискретних випадкових величин та їх умовні закони розподілу .....	217
2. Функція розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин .....	220
3. Щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин .....	222
4. Числові характеристики та умовні закони розподілу системи двох неперервних випадкових величин .....	230
5. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції.....	233
6. Нормальний закон розподілу на площині.....	242
7. Багатовимірні випадкові величини .....	245
8. Функції двох випадкових аргументів .....	249
<i>Приклади розв'язування задач</i> .....	253
<b>Змістовий модуль 11. Випадкові процеси</b> .....	
1. Марковські випадкові процеси .....	279
2. Системи народження і загибелі.....	329
3. Елементи теорії масового обслуговування.....	333
<i>Приклади розв'язування задач</i> .....	339

## **МОДУЛЬ 3. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

<i>Змістовий модуль 12. Варіаційні ряди та їх числові характеристики ..</i>	346
1. Варіаційні ряди та їх числові характеристики .....	346
2. Вибірковий метод та статистичне оцінювання .....	368
3. Перевірка статистичних гіпотез .....	389
<i>Приклади розв'язування задач .....</i>	421
<i>Змістовий модуль 13. Статистичне вивчення взаємозв'язків між явищами .....</i>	432
1. Дисперсійний аналіз .....	432
2. Кореляційно-регресійний аналіз .....	444
<i>Приклади розв'язування задач .....</i>	455
<i>Змістовий модуль 14. Застосування теорії ймовірностей та математичної статистики до розв'язування управлінських та економічних завдань .....</i>	461
1. Прийняття рішень в умовах невизначеності .....	461
2. Статистичний контроль якості .....	475
3. Вимірювання економічних ризиків.....	495
4. Ентропія випадкових величин.....	524
<i>Література .....</i>	529