Ймовірнісне та статистичне моделювання в Excel для прийняття рішень

Київ 2019

УДК 681.3.07

Кузьмичов А.І.
Ймовірнісне та статистичне моделювання в Excel для прийняття рішень. Навч. пос./ Бишовець Н.Г., Кузьмичов А.І., Куценко Г.В., Омецинська Н.В., Юсипів Т.В. – К.: Видавництво Ліра-К, 2019. – 200 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою Академії муніципального управління (Протокол № 4 від 21 грудня 2011 р.)

Рецензенти:

Євдокимов В.Ф., чл.-кор. НАН України, д.т.н., професор, директор Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України

Ільєнко А.Б., к.ф.-м.н., доцент НТУУ «Київський політехнічний інститут», кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

В основу посібника покладено багаторічний досвід викладання дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» (ТЙМС) в Академії муніципального управління та інших ВНЗ при підготовці студентів інженерно-технічних, економічних, організаційно-управлінських, соціологічних та психологічних спеціальностей, призначений для вивчення та засвоєння, у першу чергу, практичної складової дисципліни. Викладання здійснюється з врахуванням й активною орієнтацією на світову тенденцію – застосовувати в практикумі в ролі універсального й досконалого обчислювального інструменту популярний табличний процесор MS Excel.
Завдяки модельному підходу до розв’язання задач предметної області вдалося розвинути у студента необхідне мислення, без якого неможлива ефективна робота з моделювання та дослідження реальних процесів чи явищ, одночасно встановити й закріпити необхід- ний зв’язок між теоретичними та прикладними аспектами дисципліни завдяки комп'ю- терній реалізації поставлених задач.
В посібнику класичний апарат ТЙМС розповсюджено на ряд популярних модельних задач з метою довести універсальність й практичну цінність цього апарату для організації ймовірнісного та статистичного моделювання з метою формування на цій основі зважених й обґрунтованих управлінських рішень, що приймаються в умовах невизначеності й ризику.

Зміст

*І от пита ння — **бути чи не бути**.*
У чому більше гідності: скоритись
Ударам долі і лягти під стріли
Чи опором зустріти чорні хвилі
Нещасть — і тим спинити їх?

В. Шекспір. Гамлет
(пер. Ю. Андру ховича)

Вступ.
Математика випадковостей: від азартних ігор до технічних, інженерних, соціально - економічних та організаційних процесів сьогодення

*У повсякденній діяльності інженерів та технологів, економістів та фінансистів, соціологів та психологів, управлінців (менеджерів) різних рівнів відповідальності завжди доводиться мати справу з дуже складними для опису й подальшого прогнозування реальними процесами, якими треба керувати. Специфіка цих процесів зумовлює високу ступінь невизначеності з-за **випадковості** їх складових компонентів (параметрів), що виливається у нечітке розуміння того, якої саме поведінки процесу слід очікувати в заданий момент часу й бути готовим до цього. Випадковість супроводжується такими негативними наслідками у реальному житті, як то: похибки у вимірюваннях та поява бракованих виробів, неточність прогнозів щодо важливих показників, помилкове врахування тих чи інших природних чи людських чинників або ж навпаки, їх ігнорування, і як результат – прийняття нераціональних будь-яких рішень. Типовий й зрозумілий приклад – азартні ігри, й українське слово «**випадок**» інтуїтивно вказує на його зв'язок з ними – шанс **випадіння** певної карти, числа грального автомату, сторони кубика чи монети.*
Без знання наукових підходів до дослідження процесів з елементами випадковості неможливо в достатній мірі зрозуміти їх особливості, тому й виникає явна потреба у знанні цих підходів, а також умінні їх застосовувати, у першу чергу, для прогнозування поведінки випадкових процесів на майбутнє (визначення можливих ризиків, значень тих чи інших параметрів), виявлення закономірностей окремих наборів даних чи залежностей між декількома такими наборами шляхом математичного, а тепер, й комп'ютерного моделювання та імітації цих процесів шляхом організації процесу статистичного моделювання. Теоретична та практична база, яку пропонує дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» та її моделі, є універсальним апаратом для дослідження будь-яких процесів з елементами випадковості практично в усіх областях людської діяльності.

В.1. Процеси та їх дослідження

В тлумачному словнику знаходимо слово ***процес*** (що походить від лат. ***processus*** – рух, рос. ***процесс***, англ. ***process***), це:

1) Послідовна зміна предметів і явищ, що відбувається закономірним порядком; хід розвитку чого-небудь.

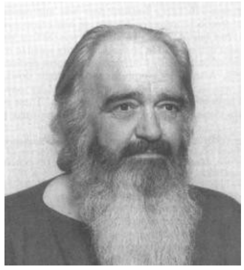
2) Сукупність ряду послідовних дій, спрямованих на досягнення певного результату.

Приклади процесів :

- *Виробничий процес* – систематична та цілеспрямована зміна кількісних та якісних характеристик засобів виробництва і робочої сили для отримання готової продукції.
- *Процес системного уведення* – автоматичне уведення в інформаційно-обчислювальну систему пакета завдань за допомогою спеціальних пристроїв «уведення-виведення».
- *Процес управління файлами* – процес, що підтримує роботу програм із зовнішньою пам'яттю і забезпечує пошук даних, контроль, обслуговування та он овлення файлів та інші функції.
- *Ринкові процеси* – економічні процеси, які відбуваються на ринку: реалізація продукції, зміни попиту, товарної пропозиції і співвідношення між ними, рух цін, прискорення або сповільнення товарообороту та ін.
- *Розгалужений процес*: у системах обробки інформації й прийняття рішень – процес, алгоритм якого містить хоча б одне розгалуження.
- *Технологічний процес* – частина виробничого процесу, яка складається з дій, спрямованих на зміну та (або) визначення стану заготовок та виробів.
- *Трудовий процес* – сукупність дій, що їх здійснюють виконавці, виготовляючи продукцію та її частини.
- *Фізико-хімічний процес* – процес, що ґрунтується на залежності між фізичними властивостями рівноважної системи і чинниками, що визначають її стан рівноваги тощо.

Аналіз та дослідження реальних процесів випадкової природи – мета сучасної інформаційної технології ймов ірн існого та статистичного моделювання засобами табличного процесора Excel для формування і подальшого прийняття відповідальних, науково обгрунт ованих й зважених управлінських рішень, заснованих на результатах модельних досліджень.

В.2. Організація досліджень процесів випадкової природи. Моделі та моделювання


С. Бір (1926-2002)

Досить часто науковцями (в різноманітних контекстах) використов у-ється абстрактне поняття – «**чорна скриня**[1]». Під цим загадковим поняттям розуміють дещо (що знаходиться десь усередині й недоступно для прямого аналізу), що можна досліджувати ззовні, з різних позицій й кожного разу отримувати певні вихідні дані («виходи», Y) як реакцію на вхідні дані («входи», X), проте механізм появи (*генерації*) конкретних результатів в той чи інший момент часу з'ясувати до кінця надто важко або ж взагалі неможливо.

Тож «чорна скриня» – характерна складова процесу моделювання будь-чого – космічних явищ, технічного засобу, живого організму, поведінки людини, політичної системи, розвитку суспільства, історичних подій тощо.

Майже усі *процеси*, від простих (побутових) до складно організованих інженерно-технічних чи соціально-економічних, містять як складову «***елемент випадковості***», тому їх можна вважати «чорними скринями» в тому сенсі, що будь-які результати, які отримують, спостерігаючи за процесом (*видима частина процесу*), зовсім нічого не кажуть про суть механізму їх генерації (*невидима частина*), а лише певним чином характеризують його роботу. Оскільки ці дві частини (*видима* й *невидима*) є ли ше умовно розділеними аспектами одного і того ж об'єкту (*процесу*), що потребує дослідження, то виправданим є такий підхід, який дозволив би розглядати процес як одне функціональне ціле. Це можливо ли- ше з використанням моделей досліджуваних процесів.

---

[1] Термін уведено англійським вченим Стаффордом Біром в його книзі «Кібернетика та управління виробництвом» (1959 р.), тепер застосовується в техніці й точних науках для дослідження надто складних систем, де відомі лише певні видимі «входи» та «виходи», за якими визначаються невидимі властивості усієї системи. Головна особливість «чорної скрині» полягає в тому, що вона недоступна для спостережень, іноді в буквальному сенсі з-за відсутності необхідних технічних засобів для проникнення всередину системи або, наприклад, через невисокі можливостей інтелекту. Одним з показових прикладів «чорної скрині» є людський мозок. Незважаючи на те, що він вже довго вивчається і дослідження не припиняю ться, мозок, як і раніше залишається досить закритою системою. Чорною скринею назвав бортовий самозаписувач його винахідник – австралійський інженер Д. Уоррен (1925-2011)

Під ***моделлю*** розуміють деякий матеріальний чи уявний об'єкт, основна мета створення якого – замінювати (наслідувати, наближати) оригінальний об'єкт, при цьому зберігаючи для аналізу ли ше деякі характерн і (найбільш важливі для дослідника) його властивості.

Розрізняють фізичні, знаков і, уявні, математичні, комп'ютерні, зокрема, електронно-табличні (spreadsheet) моделі, що реалізуються у середовищі Excel, усі вони мають певні переваги й недоліки й, відпов ідно, області застосування.

Для ТЙМС як математичної науки основною є ***математична модель*** досліджуваного об'єкту чи процесу, яка представляє собою композицію найважливіших математичних конструкцій (рівнянь, нерівностей та їх систем, логічних співвідношень, функцій), з допомогою яких можна описати оригінал. Як правило, чим простіший вигляд має та чи інша математична модель, тим більше реальних процесів вона описує.

Так, один з найпростіших математичних законів $\boldsymbol{a = b}$ зустрічається в математичних моделях чи не усіх об'єктів. Він може відображати, скажімо, той факт, що кількість ($\boldsymbol{a}$) зайня- тих стільц ів у заповненій аудиторії, що зафіксована певним виміром (скажімо, камерою спостереження), дорівнює кількості присутніх студентів ($\boldsymbol{b}$), що зафіксована іншим вимі- ром (наданим списком), відповідно, без будь-яких додаткових вимірів, а лише обчислен- нями та порівняннями (коротко – математичним моделюванням) визначається кінцевий результат – кількість вільних стільців ($\boldsymbol{c}$): $\boldsymbol{c = b - a = 0}$.

Або, ще одною простою математичною моделлю є функціональна залежність типу $\boldsymbol{y = kx}$, яка відображає пропорційну залежність між двома показниками $\boldsymbol{y}$ та $\boldsymbol{x}$, де, скажімо, $\boldsymbol{k}$ – ц і-на одиниці певної продукції, а $\boldsymbol{x}$ – кількість одиниць, тоді $\boldsymbol{y}$ – вартість покуп ки.

В.3. Предмет та методологія ТЙМС

Отже, дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» (ТЙМС) є логічним поєднанням двох математичних дисциплін : *теорії ймовірностей* та *математичної статистики*, що мають спільний історичний витік й покликан і досліджувати будь-які *випадкові процеси* наявними засобами математики.

Теорія ймовірностей в своїх дослідженнях розвивається шляхом побудови специфічної математичної моделі досліджуваного процесу, таку модель називають ***ймовірнісною моделлю***, яка б найкраще відпов ідала цьому процесу з точки зору ***ймовірності*** – ідеалізованої (*в припущенні, що така існує*) *відносної частоти* будь-якого *явища,* що супроводжує процес, й не залежить від кількості чи якості спостережень за ним, їх тривалості чи інших суб'єктивних факторів. Виходить, що ця модель притаманна лише конкретному явищу в даному процесі. Саме такий підхід дає змогу математично моделювати ті чи інші явища і є цілком природнім, бо виправдав себе на практиці в багатьох областях людської діяльності, зокрема, у військов ій галузі, інженерії, соціології, менеджменті тощо.

Математична статистика займається аналізом будь-якої (кількісної і якісної) *інформації* (*даних,* спостережень), пов'язаної з видимою частиною процесів, для:

а) отримання на її основі якісних чи кількісних висновків шляхом співставлення цих да- них з існуючими (теоретичними, гіпотетичними) моделями, та

б) пошуку кращих методів збору та обробки інформації.

Інформація (від лат. *informatio* – повідомлення, роз'яснення, вираження; *informare* – виражати, надавати форму) – в широкому сенсі, абстрактне поняття, що має дуже багато значень, в залежності від контексту. У в узькому сенсі цього слова – це відомості (повідомлення, *дані*) незалежно від форми їх подання (їх вираження).

На ранніх етапах виникнення сукупності дисциплін *теорія ймовірностей* та *математична статистика* (коли ще їх не розділяли як окремі наукові підходи) основна увага пра к- тиків була зосереджена на дослідженні особливостей процесів та явищ, пов'язаних з азартними іграми. Це був період накопичення «базового досвіду» з даного питання.

Найбільшою популярн істю серед таких процесів до сьогодня користуються два, що отримали власні науков і позначення: «*Підкидання монети*» та «*Підкидання грального кубика*». Так, французький дослідник *Жорж Бюффон* був одним із тих, хто займався дослідженням явища «*випадіння гербової сторони монети*» що супроводжує процес «*Підкидання монети*». В експерименті в ін підкидав монету *4040* разів, з яких потрібне йому явище «*випадіння гербової сторони*» відбулося в *2048* випадках (*50,69%*). На основі отриманих даних проводилися подальші дослідження.

Аналогічний експеримент проводився такими відомими науковцями як *Огастес де Морган* (*4092* підкидання, *50,05%* випадінь), *Вільям Джевонс* (*20480* підкидань, *50,68%* випадінь), *Всеволод Романовський* (*80640* підкидань, *49,23%* випадінь), *Карл Пірсон* (*24000* підкидань, *50,05%* випадінь), *Вільям Феллер* (*10000* підкидань, *49,79%* випадінь).

«Чорною скринею» в описаних випадках виступає процес «*Підкидання монети*», «вхо- дом» є кількість підкидань, а результати, що отримуються на кожному з його елементар- них етапів («вихід»), представляють собою інформацію про його *видиму частину – на- стання* (чи *ненастання*) явища «*випадіння гербової сторони*». Доповненням до цього явища є явище «*випадіння сторони номіналу*», воно може відбутися ли ше тоді, коли пер- ше не відбувається. *Невидимою частиною* цього процесу (*механізмом генерації даних*) є сукупність фізичних та інших факторів, що визначають врешті-решт випадіння тієї чи іншої сторони монети. Цей механізм може слугувати свого роду еталоном складн ості, в той час, коли його ймов ірн існа модель є найпростішою з усіх та має досить широке застос у-вання на практиці.

Статистична інформація, отримана на основі будь-яких досліджень вказаного процесу, да-ла в подальшому підґрунтя ідеям його моделювання, зокрема тій, що *ймовірнісна модель* «чорної скрині» (процесу «*Підкидання монети*») повинна обов'язково врахов увати її властивість проявляти явище «*випадіння гербової сторони*» приблизно у *50%* від усіх спостережень, незалежно від їх кількості, і тим точніше, чим більше цих спостережень.

Отже, поєднання дисциплін *теорія ймовірностей* та *математична статистика* дозволяє з різних боків підійти до дослідження випадкових процесів будь-якої природи (та явищ що їх супроводжують), і як результат – робити певні прогнози щодо них на майбутнє.

Не останнє значення в будь-якому дослідженні також має *наукова культура* дослідника. Якщо задовго до появи комп'ютерів до такої культури належало, зокрема, вміння за допомогою довідника основних формул й шляхом нескладних обчислень знаходити відповіді на ті чи інші задачі математичного характеру, то тепер до цієї культури відносять *комп'ютерну грамотність* та *знання основних особливостей певних програмних продуктів*.

У цьому посібнику таким програмним продуктом є табличний процесор MS Excel, своєї популярності він набув завдяки простим, універсальним й потужним інструментам, це: табличні обчислення, вбудовані функції, програми-надбудови, наукова та ділова графіка, принцип «Що-якщо» для роботи з статистичними масивами даних, що є необхідним для моделювання, порівняння, імітації чи прогнозу.

Незамінним науковим апаратом при обчисленні тих чи інших комбінацій в математичних моделях процесів є математична дисципліна під назвою *комбінаторика*. Без неї неможливо собі й уявити як класичну, так і сучасну *теорію ймовірностей* і, тим більше, *математичну статистику*, тому посібник розпочинається розділом «*Елементи комбінаторики*».

В.4. Історія теорії ймовірностей та математичної статистики в обличчях

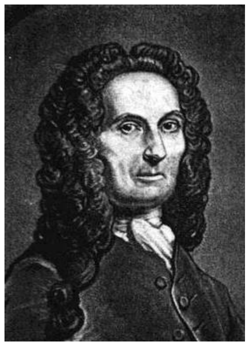
П'єр де Ферма (1601–1665) – французький математик, один із основоположників аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей та теорії чисел. За освітою й професією юрист, з 1631 року – радник парламенту в Тулузі, прекрасний поліглот, в математиці в ідомий завдяки формулюванню *Великої теореми Ферма*. Ферма розробляв основи теорії ймовірностей незалежно від Паскаля. Саме з листування 1654 року Ферма і Паскаль прийшли, зокрема, до такого поняття, як *математичне сподівання*, та теорем *про ймовірність суми подій* та *про ймовірність добутку подій*, вважається, що саме від цієї дати (запам'ятаймо – **1654** рік) в ідраховує свою історію теорія ймовірностей.

Блез Паскаль (1623–1662) – французький математик, фізик, винахідник, зокрема, ари фмометра, літератор та філософ. Класик французької літератури, в математиці – один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей та проективної геометрії. З 1654 року, в листуванні з Ферма, на прикладах з різних азартних ігор закладаються основи майбутньої теорії ймов ірностей. Паскаль та Ферма, розв'язуючи задачу «Про справедливий розподіл ставок між гравцями при перерваній серії партій» (нею займався ще італійський математик XV століття Лука Пачолі, «батько» сучасної бухгалтерії), використовували власні аналітичні методи підрахунку шансів і кожен прийшов до одного і того ж результату. У той же час Паскаль створює «Трактат про арифметичний трикутник», де досліджує властивості числового об'єкту, який в майбутньому дістав назву *Трикутника Паскаля*, та може використов уватися для підрахунку кількостей сполучень. Одним з додатків до трактату б ула робота «Про додавання числових степенів», де Паскаль пропонує метод підрахунку степенів чисел натур ального ряду. У листі Паризькій академії він повідомляє про фундаментальну роботу під назвою «Математика випадку», але видати її так і не вдалося внаслідок смерті після тривалої хвороби.

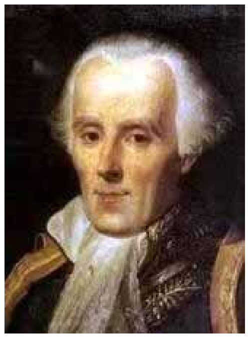
Хрістіан Гюйгенс (1629–1695) – нідерландський математик, фізик, астроном та винахідник. Вивчав право та математику в Лейденському університеті. О сновна наукова діяльність зосереджена на фізиці та астрономії. Математику використовував як прикладну науку для моделювання реальних процесів. Цікавився моделюванням процесів, пов'язаних з азартними іграми. Написав в 1657 році з цього приводу книгу «Про розрахунки в азартних іграх» - перший посібник з теорії ймовірностей, в ньому наводиться багато результатів Ферма і Паскаля.

Яків Бернуллі (1654–1705) – швейцарський математик, брат Йоганна Бернуллі, професор математики Базельського університету (з 1687 року). Вивчав теорію ймовірностей по книзі Х. Гюйгенса «Про розрахунки в азартних іграх», в якій ще не було визначення та поняття ймовірності (її замінював термін «кількість сприятливих наслідків»). Я. Бернуллі ввів значну частину сучасних понять теорії ймовірностей та сформулював перший варіант *Закону великих чисел*. Він підготовив монографію з цього питання під назвою «Мистецтво прип ущень» («Art Conjectandi»), проте видати її він не встиг. Вона була надр укована посмертно, в 1713 роц і, його братом Ніколою. Це достатньо глибокий трактат з т еорії ймовірностей, математичної статистики та їх практичних застосувань (синтез комб інаторики та теорії ймовірностей XVII століття). На честь Я. Бернуллі названий важливий на практиці *розподіл Бернуллі*.

Абрахам де Муавр (1667–1754) – англійський математик французького походження. Член Лондонського королівського товариства (1697), Паризької (1754) та Берлінської (1735) академій. Проводив ймовірнісне досл ідження азартних ігор та статистичних даних з народонаселення. Окрім нормального розподілу (Гаусса) також використовував рівном ірний розподіл. В 1718 році публікує свою головну працю по теорії ймовірностей «The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play». Книга викликала серйозний інтерес та видавалася тричі. В 1722 публікує відому *формулу Муавра*. Більшість результатів Муавра була згодом повністю перекрита результатами Лапласа. Згідно одній з легенд Муавр точно визначив дату своєї смерті – помітивши, що тривалість його сну збільшується в арифметичній прогресії, він відповідним прогнозуванням визначив день, коли він засне на 24 години, і не помилився.



П’єр-Сімон Лаплас (1749–1827) – французький математик та астроном; відомий своїми працями в області небесної механіки, диференційних рівнянь, один із засновників теорії ймов ірностей. Його заслуги в області чистої та прикладної математики, а особливо, астрономії, вражаючі: він удосконалив майже всі розділи цих наук. Наполеон нагородив Лапласа титулом графа Імперії, а також усіма можливими орденами та посадами. Лаплас розши рив та систематизував математичну основу теорії ймовірностей. Перша книга його «Аналітичної теорії ймовірностей» присвячена основам цієї науки, в другій – власне теорія ймовірностей, її застосування до дискретних випадкових величин , доведення граничних теорем Муавра-Лапласа та додатки до математичної обробки спостережень (основи майбутньої математичної статистики), статистики народонаселення



тощо. Також Лапласу належить розвиток теорії помилок та наближень, *метод найменших квадратів.*

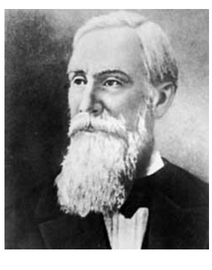
Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855) – видатний німецький математик, астроном, геодезіст та фізик, вважається одним з найвизначніших математиків усіх часів, на медалі, викарбуваній на його честь, зазначено – «король математиків». Йому належать фундаментальні дослідження майже у всіх областях математики. Характерними рисами досліджень Гаусса є надзвичайна їх різнобічність і органічний зв'язок у них між теоретичною і прикладною математикою. Зокрема, в математичній статистиці для мінімізації впливу помилок використовував свій власний *метод найменших квадратів*, котрий застосовується і до сьогодні. Хоча він не перший, хто в ідкрив *нормальний закон розподілу*, проте детально його дослідив. Графік такого розподілу з тих пір називають *гауссіаною*.

Сімеон-Дені Пуассон (1781–1840) – відомий французький фізик та математик, один із учнів Лапласа. При Наполеоні отримав титул барона, а при Луї-Філіппі – пера Франції. Йому належить велика кількість праць з фізики, небесної механіки та чистої математики. На честь Пуассона названий *розподіл Пуассона*. Разом із Лапласом був автором доведень перших *граничних теорем*.

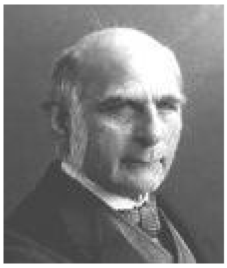
Жак Кетле (1796–1874) – видатний бельгійський математик, один із основоположників сучасної статистики. Основні праці в області математики, фізики, астрономії, метеорології та статистики. В області статистики Кетле перший, хто зайнявся статистикою не в односторонньому напрямку, а намагався одержати певні філософські висновки, розглядав спостережувані в статистиці одиничні явища із життя людей як проявлення тих чи інших законів.

Томас Байєс (1702–1761) — англійський математик та пресвітеріанський священик, член

Лондонського королевського товариства (1742). Математичні інтереси Байєса відносяться до теорії ймовірностей. Він поставив важливу задачу для теорії та розвязав її. Цей результат тепер називається просто – *теорема Байєса*. На жаль, він не дочекався виз- нання свого результату, бо работа, присвячена цій задачі, була опублікована лише у 1763 р. Формула Байєса, яка дає можливість оцінити ймовірність подій емпіричним шляхом, грає важливу роль у сучасній ТЙМС.



Пафнутій Львович Чебишов (1821-1894) – відомий російський математик та механік. В 1867 році з'явилася відома робота Чебишова «О средних величинах», в якому викладена теорема, що лежить в основі багатьох п итань як теорії ймовірностей так і теорії міри, та з якої випливає (як наслідок) *теорема Бернуллі*.



Френсіс Гальтон (1822–1911) – видатний англійський статистик, психолог та антрополог. Основні праці присвячені математичній статистиці. Йому належить розробка методів статистичної обробки результатів спостережень (зокрема, метод обчислення кореляцій між випадковими величинами). Ввів у статистику поняття регресії (1886) та коефіцієнта кор еляції (1888), створив біометричну (біологія + математична статистика) школу.

Андрій Андрійович Марков (1856–1922) – видатний російський математик. Вніс великий вклад в теорію ймовірностей, математичний аналіз та т еорію чисел. Марков є першовідкривачем широкого класу стохастичних (випадкових) процесів з дискретною та неперервною часовою компонентою, котрий названий на його честь (*процеси Маркова*), а також *ланцюгів Маркова*. Практичні застосування цих процесів є дуже широкими. Марков суттєво продовжив дослідження, що стосуються *закону великих чисел* та *центральної граничної теореми* теорії ймов ірностей та розповсюдив їх на ланцюги Маркова. Своїми від криттями (як і Колмогоров, котрий розробив теоретико-ймовірнісні основи теорії ймовірностей) зробив значний вклад в теорію випадкових процесів та теорію ймовірностей взагалі.

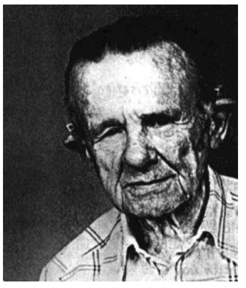
Карл (Чарльз) Пірсон (1857–1936) – видатний англійський математик, статистик, біолог та філософ; вважається засновником математичної статистики. Основні праці присвячені математичній статистиці та її застосуванню в біології. Є розробником теорії кореляції, тестів математичної статистики та критеріїв узгодженості. З його іменем пов'язані: *криві Пірсона*, *розподіл Пірсона* та ін ше.

Вільям Госсет (1876 –1937) – англійський статистик й фахівець з пивоваріння, відомий під

псевдон імом **Стьюдент** за свої роботи, названі тепер як *розподіл Стьюдента*. Після закінчення університету (1899) пра цював на передовому пивоварному заводі Гіннесс (саме там започаткована Книга рекордів Гіннесса), де він застосував свої знання із статистики при виготовленні пива та виведенні високоурожайних сортів ячменю. Провів два роки в біометричній лабораторії К. Пірсона, який допомагав Госсет у в математичній частині його досліджень. Основний результат був отриманий в 1908 р., що стосувався *малої кількості спостережень*, де основна ідея – виправлення вибіркового стандартного відхи лення. Щоб запобігти розкриттю конфіденційної інформації, Гіннесс заборонив своїм працівникам публікацію будь-яких матеріалів, тому цей результат він опублікував під псевдонімом Стьюдент, щоб приховати себе від працедавця, «вічним студентом» й увійшов в історію.

Олександр Михайлович Ляпунов (1857–1918) – видатний російський математик та механік, академік Петербурзької Академії наук. Талант ученого та викладача проявився у Ляпунова, коли той жив і працював в Україні (в Одесі). Відомими є роботи Ляпунова в області диференційних рівнянь, гідродинаміки та теорії ймовірностей.

Роналд Айлмер Фіше р (1890–1962) – англійський статистик, біолог-еволюціоніст та генетик. Сучасники називали його «генієм, котрий майже самостійно заклав основи сучасної статистики», та «найвеличнішим наступником Дарвіна». Зробив колосальний вклад в розвиток сучасної прикладної математичної статистики. Зокрема, основним методом оцінки статистичної значимості кореляцій типу «два-на-два» до сьогодні є «*точний тест Фішера*» (*F-тест*).



Карл Харальд Крамер (1893–1985) – видатний шведський математик та статистик. Основні праці стосуються теорії ймо вірностей, математичної статистики та теорії страхування. Одержав видатні результати з розподілу простих чисел та простих чи сел-близнюків. Йому належить поняття *гіпотези Крамера*, *границі Крамера-Рао*, а також *Теорема Крамера*.

Олександр Якович Хінчін (1894–1959) – радянський математик, один з найбільш значимих людей в радянській школі теорії ймов ірностей. Член-кореспондент АН СРСР (з 1939 р.). Один із засновників (1933) та дійсний член Академии педагогических наук. Застосовував методи метричної теорії функцій до задач теорії ймов ірностей та теорії чисел. Один із значимих результатів – елегантна *формула Леві-Хінчіна* для характеристичної функції процесу в теорії стохастичних процесів Леві. Хінчін одержав важливі результати в області граничних теорем, відкрив *закон повторного логарифма*. Він є також творцем *теорії випадкових процесів* (разом з А.М. Колмогоровим) та *теорії масового обслуговування*.

Андрій Миколайович Колмогоров (1903–1987) – всесвітньовідомий радянський математик. Доктор фізико-математичних наук, професор МДУ ім. Ломоносова (з 1931 року), академік АН СРСР (з 1939 р.). Один із основоположників сучасної теорії ймовірностей. Зокрема, йому належить авторство *аксіом теорії ймовірностей* (аксіоми Колмогорова). Ініц іатор реформ у викладанні шкільної математики.

Вільям Феллер (1906–1970) – видатний американський математик, член Національної АН США. Головний внесок в теорію ймовірностей та її застосування (в генетиці, фізиці, економіці) – отримав ряд першочергових результатів в області *граничних теорем* теорії ймовірностей та *теорії дифузійних випадкових процесів*. Автор визнаного у світі підручника з теорії ймовірностей (Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения», тт.1-2, М.: Мир, 1984).

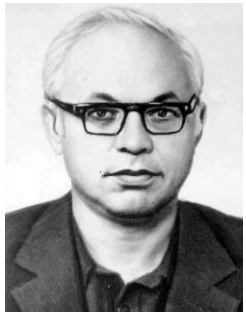
Кальямпуді Радхакрішна Рао (нар. 1920) – видатний індійський математик, статистик. Учень Карла Крамера. Докторську дисертацію написав під керівництвом Роберта Айлмера Фішера. Автор декількох теорем, пов'язаних зі *статистичними оцінками параметрів розподілу*. Сформулював відомі твердження: *теорему Рао-Блеквела* та *нерівність Крамера-Рао*. Викладає й веде наукову діяльність у Пенсильванському університеті (США).

Борис Володимирович Гнєденко (1912–1995) – видатний радянський математик, спеціаліст з теорії ймовірностей, математичної статистики, член-кореспондент (1945) та академік (1948) АН УРСР. Засновник української школи ТЙМС, працював у Московському, Київському та Львівському універ- ситетах, очолював Інститут математики АН УРСР. З теоретичних дослі- джень Гнєденка найбільш відомими є праці з граничних теорем теорії ймовірностей, в тому числі, класична монографія про суми незалеж них випадкових величин (1949 р., разом з Колмогоровим). Основоположні результати отримані ним в математичній статистиці, зокрема в задачі перевірки однорідності двох вибі- рок. В галузі прикладних досліджень зали шається неперевершеним в теорії надійності та теорії масового обслуговування, статистичних методах управління якістю продукції.

Вентцель (Долгінцева) **Олена Сергіївна** (1907-2002), доктор наук, професор, автор популярних підручників, зокрема, з теорії ймовірностей. Працюючи у Військово-повітряній академії, приймала участь у дослідженнях нових видів озброєнь, ймовірнісному моделюванні та статистичній обробці даних польових експериментів. Слід неодмінно додати, що ця талановита жінка відома не лише як математик-дослідник і чудовий педагог, але й як автор повістей й оповідань (рос. Кафедра, На испытаниях, Перелом), які вона публікувала під «математичним» псевдонімом І.Грекова (від літери «ігрек»), деякі з них екранізовані й перекладені різними мовами.

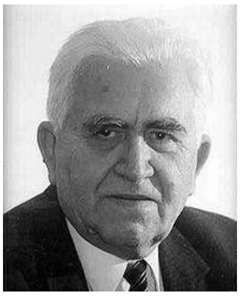
Йосип Ілліч Гіхман (1918-1985), радянський й український математик, член-кор. АН

УРСР, учасник ВВВ, працював у Київському та Донецькому університетах, в Інституті прикладної математики і механіки АН УРСР (Донецьк), один із засновників кафедр теорії ймовірностей у Київському та Донецькому університетах. Основні видання (разом з А.В. Скоро ходом): перший в російськомовній літературі підручник "Введение в теорию случайных процессов" (1964, 1965, 1978), перекладений англійською, французькою, польською, німецькою, угорською і китайською мовами; монографія «Стохастические дифференциальные уравнения» (1968, перекладена в 1971 р. німецькою, в 1972 р. - англійською мовами).



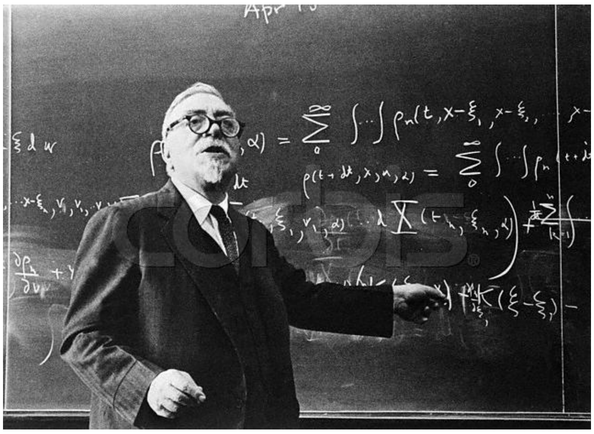
Анатолій Володимирович Скороход (1930-2011), відомий радянський й український математик, академік АН УРСР, працював у Київ ському університеті та Інституті матема тики АН УРСР, з 1993 р. професор Мічіганського університету, автор понад 400 наукових публікацій.

Михайло Йосипович Ядренко (1932–2004) – відомий радянський й україн ський математик, член-кореспондент НАН України. Під його керівництвом на кафедрі теорії ймовірностей КНУ ім. Т. Шевченка, яку очолював 32 роки (1966-1998), проводилися дослідження в галузі спектральної теорії випадкових полів, асимптотичних методів теорії ймовірностей, прикладних ймовірнісних та статистичних задач. Опублікував понад 200 наукових праць у цій області, значна частина яких перевидана англійською мовою.



Норберт Вінер (1894–1964) — американський математик, фізик, філософ, вчений-ле- генда, «батько кібернетики», засновник теорії штучного інтелекту.

Закінчивши школу в 11 років, отримав вищу освіту й у 18 років вже був доктором наук за спеціальністю «математична логіка» у Корнельському й Гарвардському університетах, в 19 – очолив кафедру математики Массачусетського технологичного інституту. Перед Другою світовою війною Вінер – професор 5 найбільших університетів США, написав сотні статей, зокрема, з теорії ймовірностей та статистики. Під час війни, куди потрапив за власним бажанням (хоча мав вади із зором), він розробляє математичний апарат для сис- тем наведення зенітного вогню (тепер це – детерміновані та стохастичні моделі з



організації й керування силами протиповітряної оборони, пізніше реалізовані у розробці сучасної техніки з автома тичним керуванням).

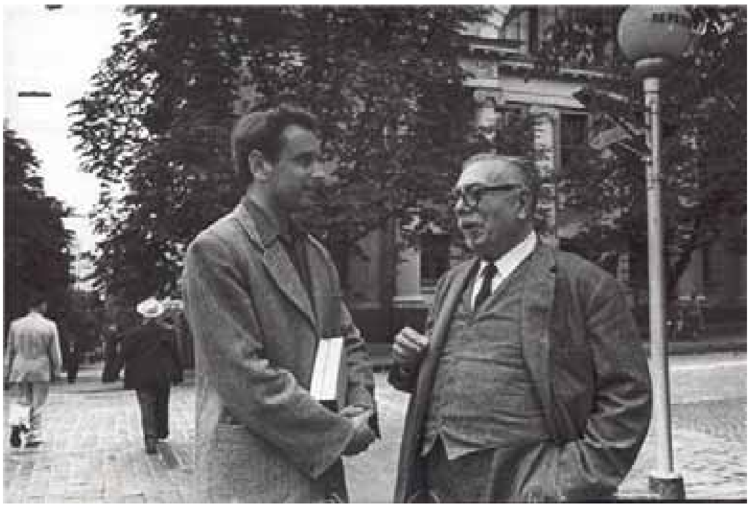
З появою перших обчислювальних (аналогових, електромеханічних) машин цей досвід був узагальнений й використаний у знаменитій книзі «Кібернетика» (повна назва «Кібернетика, або уп равління та зв'язок у живому та машині», вперше опублікована у 1948 р., у 1961 р. вийшло друге доповнене видання, перекладене російською в 1983 р.), яка визначила новий напрям науково-технічних досліджень в області автоматизації будь-яких процесів. Багато подорожував, спілкуючись кількома мовами. Автор цікавої автобіографічної книги про математику і математиків «Я – математик». Перед смертю відзначений вищою нагородою людини-вченого США – Золотою Медаллю Вченого.

Влітку 1960 р., перебуваючи на конгресі у Москві, за представленими там результатами відчув, що центр з розробки кібернетичних (автоматизованих) систем знаходиться саме в Україні (адже у 50-их роках кібернетика в СРСР була заборонена і в Москві це ще відчувалося) й забажав відвідати Київ, який йому дуже сподобався.

Цей візит став поштов хом до подальшої організації й активного розвитку наукових досліджень у цьому напрямі, зокрема, в 1962 р. засновано перший в Радянському Союзі Інститут кібернетики АН УРСР на чолі з відомим математиком академіком В.М. Глушковим, у вищій освіті з'явилися нові математичні та технічні спеціальності з цього напряму, у промисловості виникають заводи з серійного випуску електронної техніки.

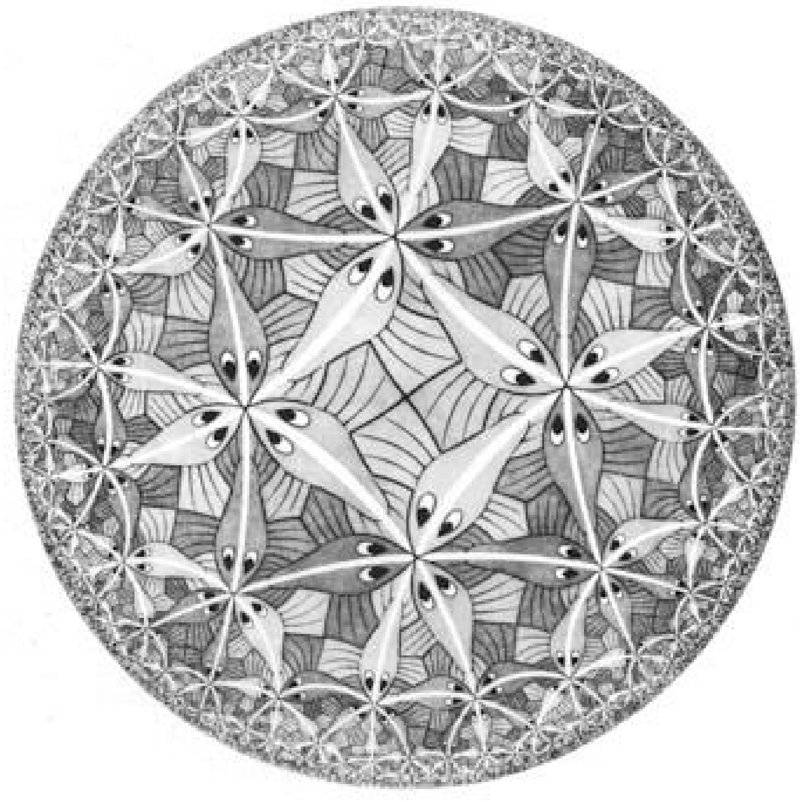
Н. Віне р. «Кібе рнетика», 2-ге видання (1961 р.)

ОГЛАВЛЕНИЕ



Норберт Вінер у Києві, на розі вул. Володимирської та Леніна (Б. Хмельницького), поруч з ним – С. Ф. Козубовський, тоді аспірант Інституту електротехніки, що вільно володів англійською й супроводжував Вінера, після створення Інституту кібернетики – його науковий співробітник

Рідкісне фото. Липень 1960 р.



«Число, положення та комбінація -
три різні сфери роздумів,
які взаємоперетинаються,
але до яких можна звести
усі математичні ідеї».

Дж. Сільвестр (1844 г.)

1. Елементи комбінаторики

В рамках дисциплін теорія ймовірностей та математична статистика доволі часто доводиться оперувати формулами, які отримали назву «комбінаторних», що походить від надзвичайно популярної математичної науки про комбінації певних об'єктів – комбінаторики.

В теорії ймовірностей, зокрема, доводиться мати справу із задачами, де необхідно підраховувати кількість певних комбінацій – можливих способів здійснення яких-небудь дій чи настання певних явищ тощо. Для цього розроблені комбінаторні формули, використання яких покликане значно спростити обчислення такого роду. Тому, на початкових етапах вивчення ТЙМС рекомендується зрозуміти їх основну суть, а відтак і особливості використання у тих чи інших випадках.Окрім теоретичних основ і форми, для кожної комбінаторної формули наведено приклад обчислення відповідних значень за допомогою засо- бів MS Excel.

Отже, комбінаторика - це розділ математики, де ставляться й вивчаються задачі про те, скільки різних комбінацій, що задовольняють певним умовам, можна скласти із зада- них об'єктів. Тож основи комбінаторики дуже важливі для оцінки ймовірностей випад- кових подій, бо саме вони дозволяють підрахувати принципово можливу кількість різних варіантів розвитку подій.

Комбінаторика (combinatorics) — розділ математики, що вивчає дискретні об'єкти, множини (поєднання, перестановки, розміщення і перерахування елементів) і відносини на них (наприклад, часткового порядку). Комбінаторика пов'язана з багатьма іншими обла с- тями математики — алгеброю, геометрією, теорією ймовірностей, і має широкий спектр застосування, наприклад в інформатиці, математичній оптимізації, теорії графів і стати с- тичній фізиці.

Термін «комбінаторика» був уведений в математичний ужиток Лейбніцем, який ще у 1666 році опублікував свою працю «Роздуми про комбінаторне мистецтво».

Для формулювання й розв'язання комбінаторних задач використовують різні моделі ко м- бінаторних **конфігурацій**.

Прикладами комбінаторних кон фігурацій є:

- **Розміщення** з *n* елементів по *k* – упорядкований набір з *k* різних елементів деякої *n*-элементної множини.
- **Перестановка** з *n* елементів (наприклад чисел 1, 2, …, n) називається всякий упорядкований набір з цих елементів. Перестановка також є розміщенням з *n* елементів по *n*.
- **Сполучення (комбінації)** з *n* по *k* – набір *k* елементів, вибраних з даних *n* елементів. Набори, що відрізняються ли ше порядком слідування елементів (але не складом), вважаються однаковими, цим поєднання відрізняються від розміщень.
- **Композиція** числа *n* – будь-яке представлення *n* у вигляді впорядкованої суми цілих позитивних чисел.
- **Розбиття** числа *n* – будь-яке представлення *n* у вигляді суми цілих додатніх чисел.

Приклади комбінаторних задач:

- Скільки існує різних перестановок з *n* гральних карт?

Відповідь: $n!$, якщо $n = 3$, тоді 6, якщо повна колода з $n = 52$ карт, тоді 52! (52 факторіал) тобто, число 80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000, це приблизно 8^{70}.

- При грі у кістки кидають дві кістки і випавші очки додають, скільки існує комбінацій таких, що сума очок на верхніх гранях рівна дванадцяти?

Відповідь очевидна: існує ли ше одна така комбінація.

Перелічувальна комбінаторика розглядає задачі про перерахування або підрахунок кіл ь- кості різних кон фігурацій (наприклад, перестановок), утворених елементами кінцевих множин, на які можуть накладатися певні обмеження.

Кількість кон фігурацій, утворених декількома маніпуляціями над множиною, підрахов ується за правилами додавання і множення комбінацій.

1.1. Правила додавання та множення комбінацій

Спочатку сформулюємо (з допомогою елементарних прикладів) два універсальних правила, які так чи інакше застосов ують при розв'язуванні комбінаторних задач.

Приклад 1.

На столі лежать кульки: 3 червоних, 10 зелених та 20 синіх. Скільки існує різних способів обрати серед них одну кульку?

Розгляд та розв'язання:

Обрати серед кульок червону можна 3-ма способами (з 3-х можливих кульок), зелену – 10-ма, а синю – 20-ма. Таким чином, обрати одну кульку з перерахованих, незважаючи на їх колір, можна $3 + 10 + 20 = 33$ способами.

Правило додавання комбінацій:

Якщо потрібно виконати одну з яких-небудь m дій, що взаємно виключають одна одну, при чому, першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію – n_2 способами, і так до m-ї дії, яку можна виконати n_m способами, то це можна здійснити $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ способами.

Приклад 2.

Ірина не хоче їхати на заняття зі своїм одногрупником Віктором в одному автобусі. Від гуртожитку до навчального закладу з 7:00 до 8:00 відправляється п 'ять автобусів. Якщо не встигнути на останній з них, то обов'язково спізнишся на перше заняття. Скільки іс- нує способів для того, щоб Ірина та Віктор могли приїхати до свого навчального закладу в різних автобусах та не запізнитися на перше заняття?

Розгляд та розв'язання:

Віктор може при їхати до навчального закладу 5-ма різними способами (на одному з п'яти автобусів). При цьому, незважаючи на вибір ним автобусу, для Ірини залишається 4 можливих способи (оскільки один з автобусів уже буде вибраний Віктором). Таким чином, для кожного з 5-ти способів Віктора існує 4 способи Ірини, що дає нам загалом $5 \cdot 4 = 20$ способів.

Правило множення комбінацій:

Якщо одну дію можна виконати n_1 способами, другу дію – n_2 способами (незалежно від вибору способу для першої) і так до m-ої дії, яку можна виконати n_m способами (незалежно від вибору способів для інших дій), то всі ці дії загалом можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ способами.

Множиною називають сукупність однотипних об'єктів (елементів множини), яка сприймається як одне ціле. Підмножиною деякої множини A називають будь-яку сукупність певних (не обов'язково усіх) елементів множини A. Підмножина також є і множиною. Якщо множина B є підмножиною множини A, то це позначають так: $B \subset A$.

Множину, що складається з k елементів, називають ***впорядкованою***, якщо кожному елементу цієї множини можна поставити у відповідність натуральне число (номер) від 1 до k (причому різним елементам множини відповідають різні натуральні числа).

Розглянемо деяку множину A, яка складається з n (різних) елементів, $A(n)$.

Нехай $1 \le k \le n$.

1.2. Перестановки, розміщення та сполучення (комбінації) без повторень

Перестановка з n елементів (без повторень) – упорядкована підмножина множини A, яка складається з n (різних) елементів та відрізняється від інших лише порядком їх розташування (нумерацією). Кількість можливих **перестановок** з n елементів позначають $P_n = n!$

Варто зазначити, що $P_n = P_{n,n}$, де $P_{n,n}$ – кількість розміщень (див. нижче).

У формулі $P_n = n!$ використовується функція факторіалу числа $n!$.

Факторіал натурального числа n – число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$, при $0! = 1$

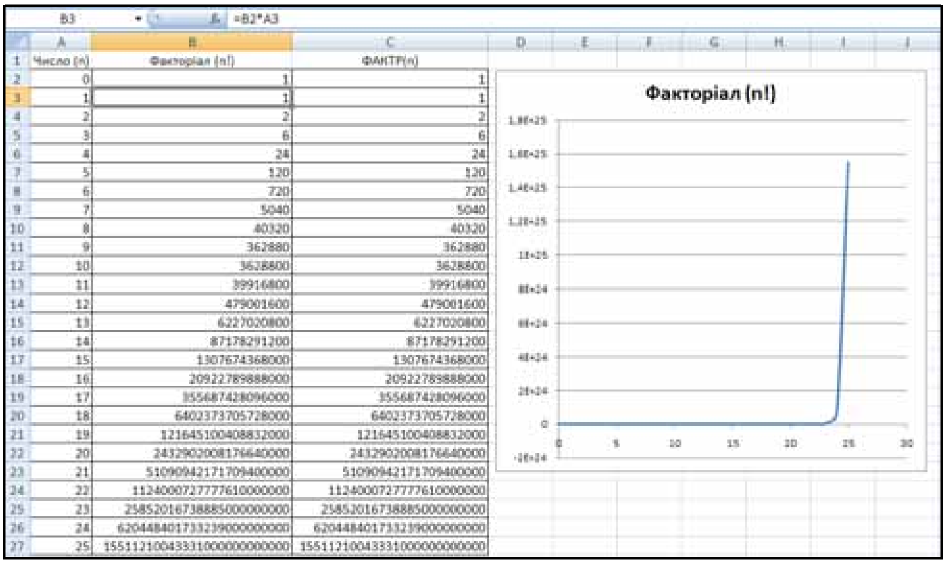
Наприклад, для $n = 5$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Знайти факторіал числа можна послідовним множенням натурального ряду чисел, в Excel для обчислення факторіалу числа й, відповідно, кількості перестановок, існує вбудована математична функція ***ФАКТР*** (від рос. ФАКТоРиал).

Обчислити факторіали чисел у заданому діапазоні можна у таблиц і трьома способами:

- кожне наступне значення факторіалу визначається множенням поточного числа (n) на факторіал попереднього числа (n-1)!
- користуючись математичною функцією ФАКТР().

Результат:



Число (n)	Факторіал (n!)	ФАКТР(n)
0	1	1
1	1	1
2	2	2
3	6	6
4	24	24
5	120	120
6	720	720
7	5040	5040
8	40320	40320
9	362880	362880
10	3628800	3628800
11	39916800	39916800
12	479001600	479001600
13	6227020800	6227020800
14	87178291200	87178291200
15	1307674368000	1307674368000
16	20922789888000	20922789888000
17	355687428096000	355687428096000
18	6402373705728000	6402373705728000
19	121645100408832000	121645100408832000
20	2432902008176640000	2432902008176640000
21	51090942171709400000	51090942171709400000
22	1124000727777610000000	1124000727777610000000
23	25852016738885000000000	25852016738885000000000
24	620448401733239000000000	620448401733239000000000
25	15511210043331000000000000	15511210043331000000000000

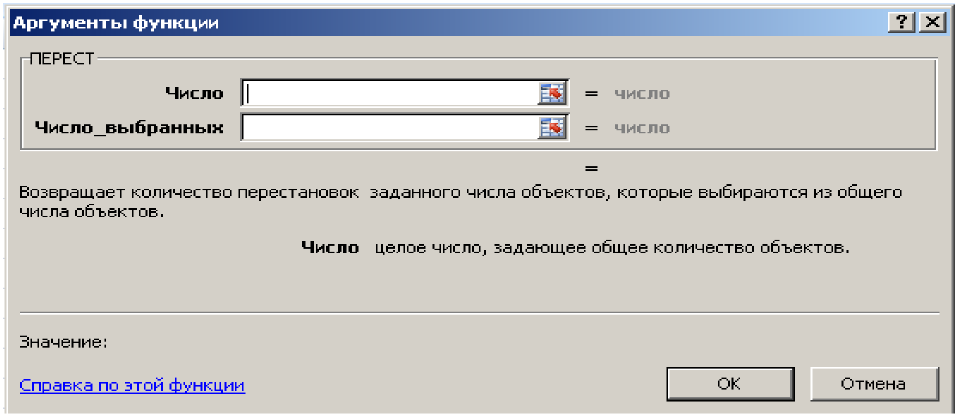
Завдання (СРС): визначити максимальне значення n, для якого Excel може обчислити його факторіал.

Розміщення з n елементів по k (без повторень) – впорядкована підмножина множини ***A(n)***, яка складається з k (різних) елементів та відрізняється від інших складом елементів або порядком їх розташування (нумерації).

Кількість ***розміщень*** з ***n*** заданих елементів по ***k*** без повторень (позначається $P_{k,n}$) можна обчислити за формулою $P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Отже, кількість розміщень з ***n*** заданих елементів по ***k*** $P_{k,n}$) можна обчислити двома способами:

- користуючись функцією ФАКТР ()
- користуючись статистичною функцією ***ПЕРЕСТ*** (від рос. ПЕРЕСТановка)



де:

- «число» означає кількість елементів основної множини ***A*** (їх ***n***), а
- «Число_выбранных» – кількість елементів впорядкованої підмножини (***k***).

(При k = n обчислюється кількість перестановок).

Приклад 3.

Правління комерц ійного банку обирає з 12 кандидатів групу (комбінацію) з 5 людей на різні посади (в усіх кандидатів однакові шанси), ***n*** = 12, ***k*** = 5.

Скільки можливих комбінацій зайняти вакантні посади в такому випадку?

Розв'язання

Оскільки комбінації (групи) людей по 5 можуть відрізнятись як складом так і порядком заповнення ними вакансій, то необхідно підрахувати кількість розміщень без повторень з 12 елементів по 5, $P_{5,12}$ = 12!/(12-5)!

Результат:

	A	B	C	D
1	n =	12	$P_{k,n}$=	95040
2	k =	5	$P_{k,n}$=	95040

	A	B	C	D
1	n =	12	$P_{k,n}$=	=ФАКТР(B1)/ФАКТР(B1-B2)
2	k =	5	$P_{k,n}$=	=ПЕРЕСТ(B1;B2)

Приклад 4.

Начальник служби безпеки банку повинен щодня розставляти десять охоронців на десять постів. В цілях посилення безпеки одна і та ж комбінація розстановки охоронців по постах не може повторюватися частіше ніж один раз на місяць. Щоб оцінити, чи це взагалі можливо, треба знайти кількість різних комбінацій розстановки охоронців.

Розв'язання

Перший спосіб

На перший пост начальник служби безпеки може призначити будь-кого з $n_1 = 10$ охоронців, на другий пост – будь-кого із тих $n_2 = 9$ охоронців, що зали шилися, і так до дев'ятого поста, на який можна призначити будь-кого з тих $n_9 = 2$ охоронців, що зали шилися. При цьому, зали шився 1 охоронець $n_{10} = 1$). Він і буде призначений на десятий пост. Тому, згідно з ***Правилом множення***, у начальника служби безпеки

$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

способів розстановки охоронців по постах. Оскільки кількість днів в місяці не може перевищувати 31-го, то існує достатньо способів розстановки.

Другий спосіб

Кількість способів розстановки десяти охоронців по десяти постах, що є в наявності у н ачальника служби безпеки, можна підрахувати як кількість перестановок з 10 елементів по 10, тобто

$$P_{10,10} = \frac{10!}{0!} = 10! = 3628800.$$

Сполучення (*комбінація, рос. сочетание*) з n елементів по k (без повторень) – підмножина множини A, кожна з яких складається з k (різних) елементів та відрізняється від інших лише набором цих елементів (їх розташування є неважливим). Позначають і обчислюють кількість сполучень без повторень з n елементів по k так:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (1.6)$$

Для підрахунку кількості сполучень в Excel можна скористатися:

- математичною функцією ФАКТР()
- математичною функцією ЧИСЛКОМБ (n;k) (від рос. ЧИСЛо КОМБинаций).

Приклад 5.

Скількома способами студент може вибрати k книг з n різних книг, запропонованих бібл іотекарем на одну тему?

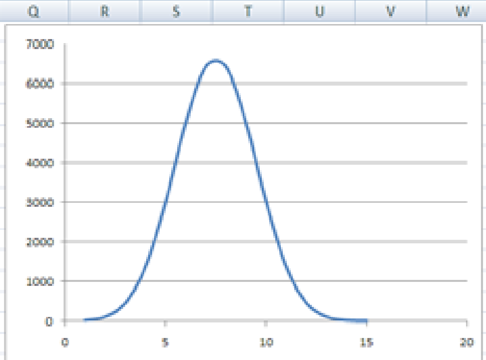
Розв'язання:

Оскільки порядок вибраних студентом книг є несуттєвим (суттєвим є лише конкретний набір книг), то потрібно обчислити кількість можливих сполучень без повторень з n книг по k.

Для дослідження залежності кількості сполучень від значень n та k побудуємо таку таблицю, n, $k \in [1, 15]$, користуючись функцією ЧИСЛКОМБ (n;k):

Число комбінацій

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1														
2	2	1													
3	3	3	1												
4	4	6	4	1											
5	5	10	10	5	1										
6	6	15	20	15	6	1									
7	7	21	35	35	21	7	1								
8	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1



Числ

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	=ЧИСЛКОМБ($A3;B$2)														
2	=ЧИСЛКОМБ($A4;B$2)	=ЧИСЛКОМ													
3	=ЧИСЛКОМБ($A5;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО												
4	=ЧИСЛКОМБ($A6;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ											
5	=ЧИСЛКОМБ($A7;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО										
6	=ЧИСЛКОМБ($A8;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(									
7	=ЧИСЛКОМБ($A9;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ								
8	=ЧИСЛКОМБ($A10;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМБ(							
9	=ЧИСЛКОМБ($A11;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ						
10	=ЧИСЛКОМБ($A12;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМ					
11	=ЧИСЛКОМБ($A13;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО				
12	=ЧИСЛКОМБ($A14;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО			
13	=ЧИСЛКОМБ($A15;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО		
14	=ЧИСЛКОМБ($A16;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО	
15	=ЧИСЛКОМБ($A17;B$2)	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМБ(	=ЧИСЛКОМБ	=ЧИСЛКОМ	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛКО	=ЧИСЛ

Завдання (СРС): розв'язати цю задачу за допомогою функції ФАКТР().

1.3. Розміщення, перестановки та сполучення з повтореннями

Розміщення з n ***елементів по*** k ***з повтореннями*** – впорядкована підмножина множини A, яка складається з k елементів (причому серед них допускаються повторення однакових) та відрізняється від інших складом елементів або порядком їх розташування (нумерації). Кількість ***розміщень з повтореннями з*** n ***елементів по*** k становить $\widetilde{P}_{k,n} = n^k$.

Наприклад, для обчислення 5^4 відповідна формула в Excel має вигляд =5^4.

Приклад 6.

Правління комерційного банку обирає з десяти кандидатів три чоловіки на три різні вакансії (вважається, що шанси всіх претендентів однакові). Якщо припустити, що один і той же відібраний з десяти кандидатів може обійняти не одну, а дві, або ж навіть усі три посади, то скільки існує можливих комбінацій заміщення трьох вакансій?